Собств. ф-ции и собств. числа можно расположить в виде последовательностей $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, \ldots$; $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m, \ldots$ в порядке возрастания абс. величины собств. чисел $|\lambda_k| \leqslant |\lambda_{k+1}|$. Собств. число λ_k повторяется в последовательности r_k раз, последовательность $\{\varphi_m\}$ можно выбрать ортонормированной. Ядро можно разложить по системе собств. ф-ций $\{\varphi_m\}$ ядра $K(x, s)$ в билинейный ряд

$$K(x, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} \varphi_k(x) \varphi_k(s).$$

Для решения неоднородного ур-ния (3) имеются след. теоремы: если λ не совпадает ни с одним собств. числом ядра K, то ур-ние (3) имеет единств. решение φ, к-рое даётся ф-лой

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k - \lambda)^{-1} f_k \varphi_k(x), \qquad (5)$$

где λ_k — собств. число, $f_k = \int_a^b f(s)\varphi_k(s)ds$ — коэф. Фурье ф-ции f относительно ортонормиров. системы собств. ф-ций $\{\varphi_m\}$; если же λ совпадает с одним из собств. чисел, напр. $\lambda = \lambda_k$, ранга r_k, то ур-ние (3) разрешимо лишь в том случае, если выполняются r_k условий:

$$f_m = \int_a^b f(s) \varphi_{m+k}(s)\, ds = 0, \quad m = 0, 1, \ldots, r_k - 1,$$

т. е. если ф-ция f ортогональна собств. ф-циям φ_m, принадлежащим собств. числу λ_k. В этом случае ур-ние (3) имеет бесконечно много решений, к-рые содержат r_k произвольных постоянных и выражаются ф-лой

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda_k \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda_j - \lambda_k)^{-1} f_j \psi_j + \sum_{i=0}^{r_k - 1} c_i \varphi_{i+k}(x), \qquad (6)$$

$\lambda_k \neq \lambda_j$, где $c_0, c_1, \ldots, c_{r_k - 1}$ — произвольные постоянные.

Для выражд. ядер (не обязательно симметричных) $K(x, s) = \sum_{k=1}^{m} a_k(x) b_k(s)$, ряды (5), (6) содержат лишь конечное число членов. Ф-лы (5), (6) наз. **ф о р м у л а м и Ш м и д т а.**

Теорию Гильберта—Шмидта можно распространить с нек-рыми изменениями и на комплекснозначные ф-ции. Аналогом симметричного ядра становится эрмитово ядро $K(x, s) = K^*(s, x)$. Существует также обобщение этой теории на случай полярного ядра $K(x, s) = L(x, s)|x - s|^{-\alpha}$, где $L(x, s)$ — непрерывное ядро, $\alpha < 1$. *Краевые задачи* и задачи на собств. значения для эрмитовых дифференц. операторов сводятся к И. у. с симметричными ядрами. Поэтому теория Гильберта — Шмидта важна для квантовой механики, она позволяет исследовать спектры разл. операторов, используется в теории рассеяния, даёт возможность найти решения ур-ния Шрёдингера для нек-рых потенциалов.

При решении И. у., ядро к-рых зависит от разности аргументов (И. у. типа свёртки), эффективным оказывается применение *интегральных преобразований* (Фурье или Лапласа) и основанного на них *Винера—Хопфа метода*. Для И. у. вида $\varphi(x) - \int_0^{\infty} K(x/s)\varphi(s)s^{-1}ds = f(x)$ удобно применять *Меллина преобразование*. Во всех указанных случаях И. у. приводится к алгебраич. уравнению, а решение фактически сводится к задаче обращения интегрального преобразования.

Для И. у. 1-го рода нет общей теории, однако в нек-рых частных случаях их решение может быть найдено, напр. ур-ния Вольтерры 1-го рода удаётся свести к ур-ниям Вольтерры 2-го рода.

Линейные И. у. с ядрами, не являющимися ядрами Фредгольма, наз. **с и н г у л я р н ы м и и н т е г р а л ь н ы м и у р а в н е н и я м и.** В этом случае теория Гильберта—Шмидта, вообще говоря, не применима. Однако для нек-рых конкретных классов сингулярных ур-ний удаётся получить важные общие результаты (см., напр., *Гильберта преобразование*).

И. у., содержащие неизвестную ф-цию нелинейно, наз. **н е л и н е й н ы м и и н т е г р а л ь н ы м и у р а в н е н и я м и.** Для нек-рых типов нелинейных И. у. разработана достаточно полная теория. Исследовано ветвление решений нелинейных И. у.: найдена зависимость решения от параметров И. у., получены значения параметров, при к-рых решение разветвляется, найдено число ветвей и представление каждой ветви как ф-ции параметров. Важность И. у. для матем. физики определяется тем, что краевые задачи и задачи на собств. значения для дифференц. ур-ний можно свести при помощи *Грина функций* к И. у.

Лит.: Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, 3 изд., М., 1968; Трикоми Ф., Интегральные уравнения, пер. с англ., М., 1960; Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1988; Интегральные уравнения, М., 1968; Вайнберг М. М., Треногин В. А., Теория ветвления решений нелинейных уравнений, М., 1969. *С. В. Молодцов.*

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ — неск. связанных между собой спец. ф-ций, родственных ф-ций второго рода $Q_0(z)$, определяемых с помощью интегралов от элементарных ф-ций (интегральные экспоненты, синус, косинус и логарифм, интегралы вероятности и Френеля). Впервые введены Л. Эйлером (L. Euler) в 1768. В общем виде И. ф. можно получить, рассматривая дифференц. ур-ние гипергеом. типа

$$\sigma(z) y'' + \tau(z) y' + \lambda y = 0, \qquad (1)$$

где $\sigma(z)$ и $\tau(z)$ — полиномы не выше 2-й и 1-й степени. При $\lambda = \lambda_n = -n\tau' - n(n-1)\sigma''/2$, $(n = 0, 1, \ldots)$ ур-ние (1) имеет решения в виде полиномов n-й степени:

$$y = y_n(z) = \frac{B_n}{\rho(z)} \frac{d^n}{dz^n} [\sigma^n(z) \rho(z)],$$

к-рые ортогональны с весом $\rho(z)$ на нек-ром интервале (a, b). Здесь B_n — нормировочная постоянная, ф-ция $\rho(z)$ удовлетворяет ур-нию $(\sigma\rho)' = \tau\rho$. Полиномы $y_n(z)$ сводятся к классич. *ортогональным полиномам* (полиномам Якоби, Лагерра и Эрмита).

Вторым линейно независимым решением ур-ния (1) при $\lambda = \lambda_n$ являются ф-ции 2-го рода

$$Q_n(z) = \frac{1}{\rho(z)} \int_a^b \frac{y_n(s)\rho(s)\,ds}{s - z} =$$

$$= y_n(z) Q_0(z)/B_0 + q_{n-1}(z)/\rho(z),$$

где

$$Q_0(z) = \frac{B_0}{\rho(z)} \int_a^b \frac{\rho(s)}{s - z} ds,$$

$$q_{n-1}(z) = \int_a^b \frac{y_n(s) - y_n(z)}{s - z} \rho(s)\, ds \text{ —}$$

полином степени $n - 1$.

С ф-циями 2-го рода $Q_0(z)$ связаны И. ф. Ф-ция $Q_0(z)$ для полиномов Якоби сводится к **н е п о л н о й б е т а - ф у н к ц и и** $B_z(p, q)$, для полиномов Лагерра — к **н е п о л н о й г а м м а - ф у н к ц и и** $\Gamma(a, z)$, для полиномов Эрмита — к **и н т е г р а л у в е р о я т н о с т и** $\Phi(z)$.