пом операторы рождения и уничтожения удовлетворяют перестановочным соотношениям антикоммутации

$$\begin{gathered}\left[a_\lambda(p),\ a^+_{\lambda'}(p')\right]_+ = \delta_{\lambda\lambda'}\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'),\\ \left[\tilde{a}_\lambda(p),\ \tilde{a}^+_{\lambda'}(p')\right]_+ = \delta_{\lambda\lambda'}\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'),\\ \left[a_\lambda(p),\ a_{\lambda'}(p')\right]_+ = \left[\tilde{a}_\lambda(p),\ \tilde{a}_{\lambda'}(p')\right]_+ =\\ = \left[a_\lambda(p),\ \tilde{a}_{\lambda'}(p')\right]_+ = 0.\end{gathered} \tag{6}$$

Операторы 4-импульса P_μ и заряда Q Д. п. след. образом выражаются через операторы рождения и уничтожения:

$$\begin{gathered}P_\mu = \int\left[a^+_\lambda(p)\,a_\lambda(p) + \tilde{a}^+_\lambda(p)\,\tilde{a}_\lambda(p)\right]p_\mu\,d\boldsymbol{p},\\ Q = e\int\left[a^+_\lambda(p)\,a_\lambda(p) - \tilde{a}^+_\lambda(p)\,\tilde{a}_\lambda(p)\right]d\boldsymbol{p}\end{gathered} \tag{7}$$

(операторы $a^+_\lambda(p)\,a_\lambda(p)$ и $\tilde{a}^+_\lambda(p)\,\tilde{a}_\lambda(p)$ являются соответственно операторами числа частиц и числа античастиц в состоянии с 4-импульсом p и спиральностью λ).

Полная система *векторов состояния* строится путём действия операторов a^+_λ и $\tilde{a}^+_\lambda$ на вакуумное состояние $|0\rangle$. Так, $a^+_\lambda(p)|0\rangle$ и $\tilde{a}^+_\lambda(p)|0\rangle$ представляют собой векторы одночастичного состояния соответственно частицы и античастицы с импульсом p и спиральностью λ, а вектор

$$a^+_{\lambda_1}(p_1)\,a^+_{\lambda_2}(p_2)\,\ldots\,a^+_{\lambda_n}(p_n)\,|0\rangle \tag{8}$$

описывает состояние n частиц с импульсами и спиральностями p_1, λ_1; p_2, λ_2; ...; p_n, λ_n. В соответствии с *Ферми — Дирака статистикой* вектор (8) антисимметричен относительно перестановки любой пары переменных p_i, λ_i $(i=1, 2, \ldots, n)$.

Лит.: Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, 4 изд., М., 1984; Бьёркен Д. Д., Дрелл С. Д., Релятивистская квантовая теория, пер. с англ., т. 2, М., 1978. *С. М. Биленький.*

ДИРА́КА УРАВНЕ́НИЕ — квантовое (волновое) ур-ние для релятивистской частицы со спином ½ (электрона, мюона, кварка и др. частиц). Получено (для электрона) в 1928 П. А. М. Дираком (P. A. M. Dirac) из след. требований: 1) ур-ние для волновой ф-ции частицы $\psi(\boldsymbol{x}, t)$ ($\boldsymbol{x}$ — пространственные координаты, t — время) должно быть линейным для того, чтобы выполнялся принцип суперпозиции состояний; 2) в ур-ние должна входить первая производная $\psi(\boldsymbol{x}, t)$ по времени с тем, чтобы задание ψ в нач. момент определяло волновую ф-цию в любой последующий момент времени; 3) ур-ние должно быть инвариантным относительно *Лоренца преобразований*, т. е. иметь один и тот же вид во всех инерциальных системах отсчёта; 4) величина $\psi^+(\boldsymbol{x}, t)\times\psi(\boldsymbol{x}, t)$ (где $^+$ — означает эрмитово сопряжение) должна иметь физ. смысл плотности вероятности нахождения частицы в точке $\boldsymbol{x}$ в момент времени t; 5) ур-ние для свободной частицы (массы m) должно быть построено так, чтобы состояние с импульсом $\boldsymbol{p}$ и энергией $\mathcal{E}$ было его решением только в случае, если выполняется релятивистское соотношение $\mathcal{E}^2=\boldsymbol{p}^2+m^2$ (используется система единиц $\hbar=c=1$).

Всем этим требованиям удовлетворяет система ур-ний для ф-ции $\psi(x)$, к-рая имеет четыре компоненты и записывается в виде столбца:

$$\psi(x) = \begin{pmatrix}\psi_1(x)\\ \psi_2(x)\\ \psi_3(x)\\ \psi_4(x)\end{pmatrix}$$

(x — точка пространства-времени). При преобразованиях Лоренца и пространственных поворотах они преобразуются как компоненты четырёхкомпонентного спинора *(биспинора)*.

Ковариантный вид Д. у. зависит от выбора *метрики пространства-времени*. Если метрика выбрана так, что $x^2=g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu=(x^0)^2-\boldsymbol{x}^2$, где $g_{\mu\nu}$ — метрический тензор ($x^0=t$), то ур-ние имеет вид

$$i\gamma^\mu\frac{\partial\psi(x)}{\partial x^\mu} - m\psi(x) = 0, \tag{1}$$

где γ^μ — *Дирака матрицы*, $\mu=0, 1, 2, 3$ (по повторяющемуся индексу предполагается суммирование). Сопряжённый биспинор $\bar{\psi}(x)=\psi^+(x)\,\gamma^0$ удовлетворяет ур-нию

$$i\,\frac{\partial\bar{\psi}(x)}{\partial x^\mu}\gamma^\mu + \bar{\psi}(x)\,m = 0. \tag{2}$$

Из (1) и (2) для четырёхмерного вектора тока $j^\mu=\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ вытекает ур-ние непрерывности:

$$\frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = 0. \tag{3}$$

Временна́я компонента вектора тока равна плотности вероятности нахождения частицы в точке $\boldsymbol{x}$ в момент времени x^0, а его пространственные компоненты являются компонентами трёхмерного вектора потока вероятности.

При данном импульсе $\boldsymbol{p}$ Д. у. имеет четыре линейно независимых решения: два решения с положит. энергией $\mathcal{E}=p_0$ $(p_0=\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2})$ и два решения с отрицат. энергией $\mathcal{E}=-p_0$. Они могут быть записаны (соответственно) в след. ковариантном виде

$$\psi_{\pm p}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\,u(\pm p)e^{\mp ipx}, \tag{4}$$

где спиноры $u(p)$, $u(-p)$ удовлетворяют ур-ниям

$$(\hat{p}\mp m)\,u(\pm p) = 0, \tag{5}$$

$(\hat{p}=\gamma^\mu p_\mu=\gamma^0p^0-\gamma^\alpha p^\alpha,\ \alpha=1, 2, 3)$.

Для сопряжённых спиноров имеем:

$$\bar{u}(\pm p)\,(\hat{p}\mp m) = 0. \tag{6}$$

Для каждой из пар спиноров в качестве независимых могут быть выбраны решения с определ. спиральностью (проекцией спина на направление импульса) λ ($\lambda=\pm½$). В представлении Дирака — Паули (в к-ром γ^0 диагональна) эти решения имеют вид:

$$\begin{gathered}u_\lambda(p) = N\begin{pmatrix}v_\lambda\\ \frac{2\lambda|\boldsymbol{p}|}{p_0+m}v_\lambda\end{pmatrix};\quad \mathcal{E}=p_0,\ \lambda=\pm{}^1/_2,\\ u_\lambda(-p) = N\begin{pmatrix}\frac{-2\lambda|\boldsymbol{p}|}{p_0+m}v_\lambda\\ v_\lambda\end{pmatrix};\quad \mathcal{E}=-p_0,\ \lambda=\pm{}^1/_2.\end{gathered} \tag{7}$$

Здесь v_λ — двухкомпонентный спинор, удовлетворяющий ур-нию

$$\frac{1}{2}\,\boldsymbol{\sigma n}v_\lambda = \lambda v_\lambda, \tag{8}$$

где $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{p}/|\boldsymbol{p}|$, $\boldsymbol{\sigma}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ — *Паули матрицы*, а множитель N определяется нормировкой спинора $u(\pm p)$. Используются след. нормировки (для каждого значения λ):

$$\begin{aligned}&\text{а)}\ (u(\pm p))^+\,u(\pm p) = 1,\quad N=\sqrt{(p_0+m)/2p_0},\\ &\text{б)}\ \bar{u}(\pm p)\,u(\pm p) = \pm1,\quad N=\sqrt{(p_0+m)/2m},\\ &\text{в)}\ \bar{u}(\pm p)\,\gamma^0u(\pm p) = 2p_0,\quad N=\sqrt{p_0+m},\end{aligned} \tag{9}$$

при этом $v^+v=1$.

Для $m=0$ решения свободного Д. у. являются собств. ф-циями матрицы $\gamma^5=-i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$:

$$\gamma^5u_\lambda(\pm p) = \mp2\lambda u_\lambda(\pm p). \tag{10}$$

В матричные элементы процессов со слабым взаимодействием спиноры $u_\lambda(p)$, описывающие нейтрино, входят в