$\bar{\xi} = A\xi + \dots$, где $\bar{\xi}$ — образ точки ξ, многоточия обозначают нелинейные члены, а A — матрица, собств. числа к-рой совпадают с $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$.

Существуют системы с глобальной секущей, у к-рых каждая траектория последовательно пересекает нек-рую поверхность бесконечное число раз. Отображение

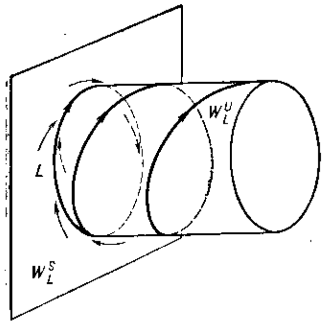

Рис. 2. Устойчивая W_L^s и неустойчивая W_L^u сепаратрисы седлового периодического движения L в случае положительных мультипликаторов.

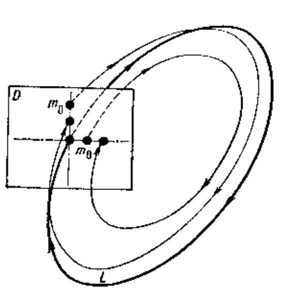

Рис. 3. Отображение Пуанкаре по траекториям, проходящим в окрестности седлового периодического движения.

Пуанкаре фактически определяет Д. с. с дискретным временем. К этому классу относятся все системы, описывающие действие периодич. возмущения на автономную систему, к-рые можно записать в виде $\dot{x} = X(x, \theta)$, $\dot{\theta} = \omega$, где X — периодическая по θ вектор-функция. Фазовое пространство этой системы цилиндрическое: точки (x, θ) и $(x, \theta + 2\pi)$ отождествляются. Глобальная секущая — гиперплоскость $\theta = 0$. В частности, ур-ния

$$\ddot{x} + \sin x = -\alpha\dot{x} - A_2 A_1^{-1} \sin(kx - \theta), \quad \dot{\theta} = \omega, \qquad (*)$$

описывающие движение электрона в поле двух волн, определяют Д. с. с глобальной секущей.

Устойчивые и неустойчивые сепаратрисы равновесия и (или) периодич. движений могут пересекаться. Траектории, принадлежащие пересечению устойчивых и неустойчивых сепаратрис разных периодич. движений, наз. гетероклиническими. Траектория, принадлежащая пересечению устойчивой и неустойчивой сепаратрис периодич. движения L (и отличная от L), наз. гомоклинической. Как правило, в её окрестности имеется бесконечное множество разнообразных траекторий, среди к-рых содержится счётное множество седловых периодич. движений. Наличие гомоклинич. траекторий может служить критерием существования сложных режимов в Д. с. (см. *Стохастические колебания*, *Странный аттрактор*), а также являться основой для объяснения ряда нелинейных эффектов. Так, напр., в системе (*) при наличии даже очень слабой второй волны ($A_2 \ll 1$) в отсутствие потерь ($\alpha = 0$) внеш. возмущение может сделать захваченные электроны пролётными и наоборот. Это объясняется след. образом. В отсутствие второй волны ($A_2 = 0$) траектории захваченных и пролётных электронов разделены сепаратрисой (рис. 4). Плоскость $(x, \dot{x})$ может служить секущей плоскостью для траекторий системы (*) как при $A_2 = 0$, так и при $A_2 \neq 0$. Но при $A_2 = 0$ траектории отображения Пуанкаре [точки последовательного пересечения в пространстве $\{x, \dot{x}, \theta\}$ траекторий системы (*) с плоскостью $\theta = 0$] лежат строго на траекториях автономной системы, в частности, устойчивые и неустойчивые сепаратрисы периодич. движения $x = \dot{x} = 0$ совпадают, а при $A_2 \neq 0$ это не так. Сепаратрисы пересекаются, возникает гомоклинич. траектория, образуется «стохастический слой» (рис. 5), внутри к-рого большинство траекторий неустойчиво. Это приводит к тому, что электроны, имеющие сколь угодно близкие значения координат и импульсов внутри стохастич. слоя, могут стать как пролётными, так и захваченными.

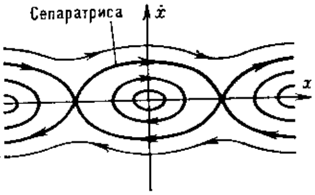

Рис. 4. Фазовая плоскость электрона в поле гармонической волны.

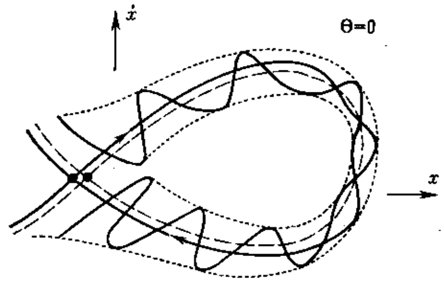

Рис. 5. Невозмущённая сепаратриса (штриховая линия) и гомоклиническая траектория в её окрестности на секущей $\theta = 0$. Пунктирной линией обозначены границы стохастического слоя.

Критерии поведения траекторий. При исследовании конкретных систем важно знать типы состояний равновесия, периодич. движений, поведения сепаратрис. Существуют критерии, позволяющие определить их непосредственно по ф-лам, задающим правые части систем дифференц. ур-ний. Для систем с двумерным фазовым пространством методы исследования развиты настолько глубоко, что многие задачи удаётся решить до конца. Примером подобного критерия для систем на плоскости служит критерий Бендиксона — Дюлака: если для системы $\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)$, $\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)$ существует гладкая ф-ция $B(x_1, x_2)$ такая, что выражение $\partial(Bf_1)/\partial x_1 + \partial(Bf_2)/\partial x_2$ знакопостоянно в односвязной (двусвязной) области, то в этой области отсутствуют замкнутые траектории (не может быть более одной замкнутой траектории).

Для $n \geqslant 3$ ситуация значительно сложнее. Однако и здесь существуют разл. критерии, в т. ч. и критерии возникновения сложной структуры траекторий. Напр., критерий Мельникова существования гомоклинич. траектории заключается в следующем. Пусть периодическая по t система

$$\dot{x} = U(x, y) + \varepsilon u(x, y, t), \quad \dot{y} = V(x, y) + \varepsilon v(x, y, t)$$

при $\varepsilon = 0$ является гамильтоновой и имеет сепаратрису, идущую из седла O_1 в седло O_2, ур-ние к-рой $x = x_0(t - t_0)$, $y = y_0(t - t_0)$. Тогда, если ф-ция

$$\Delta_\varepsilon(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \, \{u[x_0(t - t_0), y_0(t - t_0), t] V - vU\},$$

где в V, v, U подставлены те же аргументы, что и в u, имеет простые нули, то возмущённая система имеет (гетеро)гомоклинич. траекторию, принадлежащую пересечению устойчивой и неустойчивой сепаратрис сёдел O_1 и O_2 (седла $O_1 = O_2$). Напр., система (*) всегда (при $\alpha = 0$, $A_2 \neq 0$) имеет гомоклинич. траекторию и стохастич. слой.

Критерий Шильникова сформулируем лишь для систем с трёхмерным фазовым пространством. Пусть система $\dot{x}_i = X_i(x_1, x_2, x_3)$, $i = 1, 2, 3$, имеет состояние равновесия O: $x = x^*$, характеристич. ур-ние для к-рого имеет положит. корень $\lambda_3 > 0$ и два комплексно сопряжённых: $\lambda_1 = \lambda_2^*$, Re $\lambda_{1,2} = \alpha < 0$ и $\lambda_3 + \alpha > 0$. Пусть также одна из траекторий одномерной неустойчивой сепаратрисы точки O лежит на двумерной устойчивой, образуя петлю сепаратрисы Γ. При этом как для данной системы, так и для всех близких к ней в окрестности Γ существует сложная структура траек-