Состояние Д. с. описывают набором переменных, выбираемых из соображений естественности их интерпретации, простоты описания, симметрии и т. п. Множество состояний Д. с. образует *фазовое пространство*, каждому состоянию отвечает точка в нём, а эволюция изображается (фазовыми) т р а е к т о р и я м и. Чтобы определить близость состояний, в фазовом пространстве Д. с. вводят понятие расстояния. Совокупность состояний в фиксиров. момент времени характеризуется ф а з о в ы м о б ъ ё м о м.

Качеств. особенности эволюции Д. с. проявляются в характере фазовых траекторий. Напр., состоянию равновесия отвечает вырожденная траектория — точка в фазовом пространстве, периодич. движению — замкнутая траектория. Траектория квазипериодич. движения с m несоизмеримыми частотами ω_i (т. е. такими, что не существует отличных от нуля целых чисел k_i, удовлетворяющих равенству $\sum_{i=1}^{m} k_i\omega_i=0$) сколь угодно близко проходит около любой точки m-мерного тора (всюду плотна на нём). Вообще, для стационарного режима (установившегося движения системы) характерны траектории, плотные в нек-ром подмножестве фазового пространства, а для переходного процесса — траектории, не возвращающиеся в окрестность своих начальных точек.

Виды динамических систем. По характеру ур-ний и методам исследования Д. с. делят на классы. К о н е ч н о м е р н ы е и б е с к о н е ч н о м е р н ы е (распределённые) Д. с.— системы с конечномерным и бесконечномерным фазовым пространством. В конечномерном случае к о н с е р в а т и в н ы е и д и с с и п а т и в н ы е Д. с.— системы с сохраняющимся и несохраняющимся фазовым объёмом. *Гамильтоновы системы* с ф-цией Гамильтона, не зависящей от времени, образуют подкласс консервативных систем. У диссипативных систем с неогранич. фазовым пространством часто существует ограниченная область в нём, куда попадает навсегда любая траектория. Д. с. с н е п р е р ы в н ы м в р е м е н е м (п о т о к и) и Д. с. с д и с к р е т н ы м в р е м е н е м (к а с к а д ы); дискретность времени иногда отражает существо реального процесса (дискретность моментов прохождения импульса через усилитель в оптическом квантовом генераторе, сезонность в экологии, смена поколений в генетике и т. д.). Г р у б ы е и н е г р у б ы е Д. с.; понятие грубости (структурной устойчивости) характеризует качественную неизменность типа движения Д. с. при малом изменении её параметров. Значения параметров, при к-рых система перестаёт быть грубой, наз. б и ф у р к а ц и о н н ы м и (см. *Бифуркация*). При размерности фазового пространства больше 2 могут существовать целые области в пространстве параметров, где Д. с. оказывается негрубой.

Установившемуся движению диссипативной системы отвечает а т т р а к т о р — множество траекторий, к к-рому притягиваются все близкие траектории. Статич., периодич. или квазипериодич. режимам отвечают простейшие аттракторы: состояние равновесия, периодич. траектория и тор соответственно. Сложному непериодич. режиму отвечает *странный аттрактор*. С физ. точки зрения, диссипативность системы означает, что все движения с достаточно большой энергией затухают.

Иногда (не совсем точно) диссипативной наз. систему, в к-рой уменьшается объём любой области фазового пространства при сдвиге по траекториям. (В бесконечномерном случае предполагается, что уменьшается объём любого k-мерного шара при достаточно большом k.) Для конечномерной Д. с., заданной системой дифференц. ур-ний $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})$, диссипативность в этом смысле соответствует неравенству $\operatorname{div}\boldsymbol{X}<0$.

Локальные свойства траекторий описывают при помощи понятий дифференц. геометрии. Примером может служить Д. с., задаваемая системой n (нелинейных) дифференц. ур-ний $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})$; здесь $\boldsymbol{x}=x_1, \ldots, x_n$ и $\boldsymbol{X}$ — n-мерные векторы, а точкой обозначено дифференцирование по времени. (Такая система, у к-рой ф-ции $\boldsymbol{X}$ не зависят от времени t, наз. а в т о н о м н о й.) Поведение в окрестности состояния равновесия O: $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^*$ (где $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}^*)=0$) прежде всего зависит от свойств линеаризованной вблизи O системы, а именно, корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ характеристич. ур-ния $\det[\partial X_i/\partial x_j - \lambda\delta_{ij}]_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^*}=0$, где δ_{ij} — символ Кронекера. Пусть $\operatorname{Re}\lambda_j$ отрицательны для p и положительны для q корней, причём $p+q=n$. Если $p=n$ ($p=0$), точка O наз. устойчивым (неустойчивым) у з л о м: траектория с началом в малой окрестности точки O попадает в O при $t\to+\infty$ ($t\to-\infty$). Если $p\neq 0\neq q$, точка O наз. с е д л о м. Через неё проходят две поверхности: p-мерная W_0^s и q-мерная W_0^u, наз. устойчивой и неустойчивой с е п а р а т р и с а м и точки O; они образованы траекториями, стремящимися к O при $t\to+\infty$ и $t\to-\infty$ соответственно. Остальные траектории уходят из окрестности седла при $t\to\pm\infty$ (рис. 1). Траектория, лежащая одновременно в W_0^s и W_0^u (и не совпадающая с O), наз. д в о я к о а с и м п т о т и ч е с к о й к O или п е т л е й с е п а р а т р и с ы седла. При стационарном движении ей отвечает бегущая локализов. волна, в данном случае спадающая при $t\to\pm\infty$ (таковы нек-рые *солитоны*). Если $\operatorname{Re}\lambda_i=0$ для некоторых λ_i, то устойчивость состояния равновесия определяется следующими членами разложения векторного поля $\boldsymbol{X}$ в ряд Тейлора вблизи O.

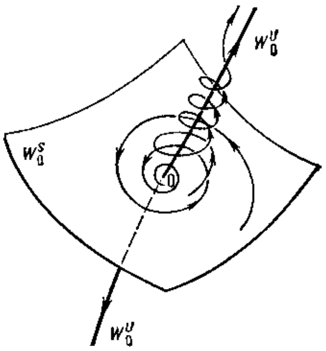

Рис. 1. Устойчивая W_0^s и неустойчивая W_0^u сепаратрисы седлового состояния равновесия O.

Тот же приём линеаризации применяют для изучения поведения траекторий в окрестности периодич. движения L: $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}(t)$, где $\boldsymbol{\alpha}(t+\tau)=\boldsymbol{\alpha}(t)$. Фундам. матрица решений линеаризованной вблизи $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}$ системы ур-ний имеет вид $c(t)\exp R(t)$, где $c(t)$ — периодич. ф-ция с периодом τ. Поведение траекторий характеризуют м у л ь т и п л и к а т о р ы [собств. значения $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ матрицы $\exp R(\tau)$]; один из них, скажем γ_n, равен 1. Если $|\gamma_i|<1$ ($|\gamma_i|>1$) для всех $i\leqslant n-1$, то периодич. движение устойчиво (неустойчиво). Если p мультипликаторов лежат внутри, а q — вне единичного круга в комплексной плоскости, $p+q=n-1$, то имеем периодич. движение седлового типа. В этом случае L лежит в пересечении двух поверхностей: $(p+1)$-мерной W_L^s и $(q+1)$-мерной W_L^u (устойчивой и неустойчивой сепаратрис).

Поверхность W_L^s (W_L^u) состоит из траекторий, стремящихся к L при $t\to+\infty$ ($t\to-\infty$). При $n=3$ и $p=q=1$ поверхность W_L^s (W_L^u) топологически эквивалентна листу Мёбиуса, если мультипликатор γ, по модулю меньший (больший) 1, отрицателен, или цилиндру, если γ положителен (рис. 2).

Поведение траекторий в окрестности L удобно изучать, рассмотрев их следы на $(n-1)$-мерной секущей поверхности D, без касания пересекающей L, и близкие к L траектории. Отображение точки m_0 из D в первую точку пересечения с D траектории, проходящей через m_0 (рис. 3), наз. о т о б р а ж е н и е м П у а н к а р е (или отображением последования). В координатах $\xi=\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ таких, что L пересекает D в нуле, отображение Пуанкаре имеет вид