Вершинные модели. На шахматной доске в центрах белых граней (подрешётка A) расположены спины σ_i, в центрах чёрных граней (подрешётка B) — спины μ_a. Взаимодействуют спины четырёх граней, сходящихся в одной точке — вершине (рис. 2). Каждой конфигурации спинов на гранях с вершиной V приписывается гиббсовский статистич. вес $w_V(\sigma_i, \sigma_j; \mu_a, \mu_b)$, наз. вершинным статистич. весом (ВСВ). Статистич. вес $W\{\sigma, \mu\}$ заданной конфигурации спинов $\{\sigma, \mu\}$ на решётке равен произведению ВСВ всех вершин. Предполагается, что ВСВ не меняется при независимых перестановках аргументов $(\sigma_i \leftrightarrow \sigma_j)$ и $(\mu_a \leftrightarrow \mu_b)$. Если ВСВ не зависят от переменных μ_a, μ_b, модель относится к описанным ранее моделям с парным взаимодействием, т. к. на подрешётке A спины σ_i и σ_j являются ближайшими. Если ВСВ $w_V(\sigma_i, \sigma_j; \mu_a, \mu_b)$ представимы в виде произведения ПСВ $w_V^A(\sigma_i, \sigma_j)$ и $w_V^B(\mu_a, \mu_b)$, то система спинов $\{\sigma_i, \mu_a\}$ распадается на две невзаимодействующие подсистемы с парным взаимодействием.

Восьмивершинная модель (8 V-модель). Спины σ и μ принимают значения ± 1. Энергия взаимодействия спинов в вершине инвариантна относительно группы $Z_2 \otimes Z_2$:$\sigma_i \longrightarrow \pm\sigma_i$, $\mu_a \longrightarrow \pm\mu_a$: $-T^{-1}\varepsilon_V\{\sigma, \mu\} = K_0 + K_A\sigma_i\sigma_j + K_B\mu_a\mu_b + K\sigma_i\sigma_j\mu_a\mu_b$. Симметрией 8 V-модели обладает атомарный водород, адсорбированный на поверхности вольфрама.

Рёберное представление 8V-модели. На рёбрах шахматной решётки вводят переменные $\alpha_l = \pm 1$ (l — номер ребра). Знак переменной изображается направлением стрелки на ребре: если $\alpha_l = 1$, то при движении в направлении стрелки чёрное поле должно оставаться справа, а при $\alpha_l = -1$ — слева (рис. 3). Переменную α_l связывают с переменными σ_i, μ_a на гранях i и a, разделённых ребром l:$\alpha_l = \sigma_i\mu_a$. Произведение α_l по рёбрам, сходящимся в вершину V, равно единице. Восемь возможных конфигураций стрелок в вершине изображено на рис. 3. Случаи X и Y соответствуют разным типам вершин на шахматной доске, образующих подрешётки X и Y. Каждой конфигурации стрелок в вершине приписывают ВСВ: $w_1, \ldots, w_8$. ВСВ не изменяются при изменении ориентации всех стрелок в вершине ($Z_2 \otimes Z_2$-симметрия). ВСВ на решётках X и Y различны.

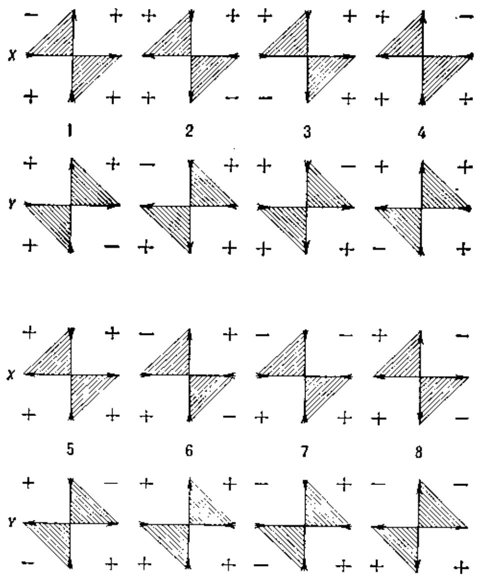

Рис. 3. Допустимые вершины 8V-модели. На гранях указана одна из двух возможных спиновых конфигураций, другая получается из неё обращением всех знаков.

Обобщённая 8V-модель. Рёберную модель можно рассматривать вне зависимости от её связи с $Z_2 \otimes Z_2$-симметричной граневой моделью. В рамках этой модели можно описать модели Поттса, АТ и модель Бакстера, если параметризовать ВСВ согласно табл. 2.

Табл. 2.

Номер вершины	1	2	3	4	5	6	7	8
ВСВ на подрешётке X	ae^u	ae^u	be^{-u}	be^{-u}	ce^s	ce^{-s}	d	d
ВСВ на подрешётке Y	ae^{-u}	ae^{-u}	be^u	be^u	ce^{-s}	ce^s	d	d

Модель Бакстера (симметричная 8V-модель), $u=s=0$, модель имеет точное решение. Шестивершинная модель (6V-модель, модель льда), частный случай 8V-модели при $d=0$. Модель жёстких гексагонов (треугольный решёточный газ). Узлы треугольной решётки заняты частицами или свободны. Вес занятого узла равен z, вес свободного узла равен 1. Соседние узлы не могут быть заняты одновременно. Переменная σ_j описывает занятый узел ($\sigma_j=1$) или вакансию ($\sigma_j=0$). Модель можно сформулировать как вершинную на квадратной решётке, для этого треугольная решётка (пунктирные линии) деформируется, как показано на рис. 4.

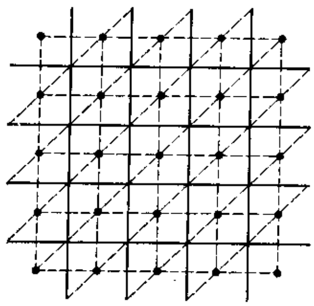

Рис. 4. Модель жёстких гексагонов на квадратной решётке.

Обобщённая модель жёстких гексагонов (ЖГ) получается из предыдущей внесением в ВСВ дополнит. множителя $\exp(L\sigma_1\sigma_2 + M\mu_1\mu_2)$, где L и M — новые параметры. Модель ЖГ имеет точное решение, если L, M и z связаны соотношением:

$$z = (1 - e^{-L})(1 - e^{-M})(e^{L+M} - e^L - e^M)^{-1}. \qquad (2)$$

Модель жёстких гексагонов является предельным случаем ЖГ при $L \to 0$, $M \to -\infty$ и фиксиров. z.

Преобразования моделей. Можно установить соответствие между нек-рыми из описанных моделей с помощью *дуальных преобразований* (ДП). В самодуальных моделях ПСВ сохраняют свой вид при ДП, преобразуются только параметры взаимодействия, а ПСВ приобретают нормировочный множитель. В 8V-модели можно произвести ДП для спинов на одной из подрешёток, зафиксировав их на другой. При таком частичном ДП 8V-модель перейдёт в модель АТ. При $a=b$ 8V-модель дуальна однородной и изотропной модели АТ. Совершив ДП над оставшимися переменными (полное ДП), можно установить соответствие между двумя дуальными 8V-моделями (переменные σ и μ при полном ДП обмениваются подрешётками). Полное ДП модели АТ состоит из двух последоват. частичных ДП: АТ$\to$8$V$$\to$АТ. Модель БВ дуальна дискретной модели Гаусса, если $KJ=1$.

Кулоновский решёточный газ. Низколежащие возбуждённые состояния систем с симметрией $O(2)$ (XY-модель, модель БВ) разделяются на спиновые волны и магн. вихри. Последние характеризуются целочисл. переменной $m(\boldsymbol{R})$, определяющей циркуляцию спинов вокруг грани с центром в $\boldsymbol{R}$. Числа $m(\boldsymbol{R})$ наз. зарядами вихрей. После исключения спиновых волн задача сводится к вычислению статистич. суммы двумерной кулоновской нейтральной плазмы на решётке. Роль заряж. частиц играют вихри, их взаимодействие логарифмически зависит от расстояния.