помощью дискретной Г. трансляций. Тривиальными расширениями (полупрямыми произведениями) являются Г. движений евклидовых и псевдоевклидовых пространств, в т. ч. группа Пуанкаре.

Группы Ли. Элементы ГЛ задают конечным набором числовых параметров (координат) так, что групповое умножение и переход к обратному элементу выражаются с помощью гладких (бесконечно дифференцируемых) ф-ций от этих параметров. Число параметров наз. р а з м е р н о с т ь ю ГЛ. Параметры могут быть вещественными или комплексными, в соответствии с этим ГЛ наз. в е щ е с т в е н н о й или к о м п л е к с н о й ГЛ. Каждую комплексную ГЛ можно рассматривать как веществ. ГЛ вдвое большей размерности. Примерами ГЛ являются физически важные Г. трансляций, вращений, конформных и унитарных преобразований разных размерностей, группа Лоренца, группа Пуанкаре и т. д. ГЛ в целом может обладать такой топологией, что её невозможно покрыть одной системой координат. Это имеет место даже для такой простой ГЛ, как Г. поворотов плоскости, $SO(2)$. Топологически эта Г. эквивалентна окружности и не может быть гладко отображена на веществ. прямую (ось координат) или к.-л. интервал этой прямой.

Поэтому в общем случае на ГЛ вводят целое семейство с и с т е м к о о р д и н а т (карт), каждая из них покрывает нек-рую область Г. (к о о р д и н а т н у ю о к р е с т н о с т ь). На пересечении любых двух координатных окрестностей, где имеют смысл сразу две системы координат, переход от одной из них к другой описывается с помощью гладких (бесконечно дифференцируемых) ф-ций. Операция умножения в Г. и переход к обратному элементу в любой системе координат описываются гладкими (бесконечно дифференцируемыми) ф-циями. Сказанное можно сформулировать след. образом: ГЛ — это группа, к-рая одновременно является гладким *многообразием*, причём групповая структура согласована со структурой многообразия.

Для определения алгебры Ли пользуются матричной реализацией (линейным представлением) Г.: пусть каждый элемент g группы G представляет собой матрицу (или, что то же, линейный оператор в конечномерном линейном пространстве). Элемент g характеризуется набором числовых параметров (координат на Г.), $g = g(x^1, \ldots, x^n)$. Условимся выбирать эти параметры так, чтобы единице Г. соответствовали нулевые значения параметров, $e = g(0, \ldots, 0)$. Тогда и н ф и н и т е з и м а л ь н ы м о п е р а т о р о м (г е н е р а т о р о м) Г. G наз. производная от ф-ции g по одному из параметров, взятая в единице Г.: $X_i = [\partial g/\partial x^i]_{x^1 = \ldots = x^n = 0}$. Ясно, что генераторы являются матрицами (операторами) той же размерности, что и элементы Г. Оказывается, что коммутатор двух генераторов линейно выражается через генераторы: $[X_i, X_j] = X_iX_j - X_jX_i = \sum_k C_{i\,j}^{\,k} X_k$. Числа $C_{i\,j}^{\,k}$ наз. с т р у к т у р н ы м и к о н с т а н т а м и Г. Существенно, что набор структурных констант не зависит от того, какая матричная реализация (представление) Г. выбрана для определения операторов X_i. Поэтому структурные константы характеризуют не конкретное представление, а саму Г. В то же время структурные константы зависят от выбора системы координат вблизи единицы Г. При изменении системы координат структурные константы меняются как *тензоры*. Выбором системы координат обычно добиваются, чтобы набор структурных констант был по возможности более простым. Для полупростой ГЛ можно построить из генераторов скалярный квадратичный оператор C, наз. о п е р а т о р о м К а з и м и р а: $C = \sum g_{pq}^{-1} X_p X_q$, где $g_{pq} = \sum_{st} C_{p\,t}^{\,s} C_{q\,s}^{\,t}$ — метрич. тензор Картана.

Операторы X_i, $i = 1, \ldots, n$, образуют базис алгебры Ли. Произвольный элемент алгебры является линейной комбинацией базисных элементов, $X = \sum_i c_i X_i$.

Т. о., алгебра Ли группы Ли G является к а с а т е л ь н ы м п р о с т р а н с т в о м к многообразию G в точке e.

Можно определить структурные константы и не обращаясь к матричной реализации (линейному представлению) Г. Пусть в нек-рой системе координат закон умножения в ГЛ имеет вид $x''^k = \psi^k(x, x')$, так что $g(x)\,g(x') = g(x'')$ (здесь одной буквой x обозначен весь набор координат $x^1, \ldots, x^n$). По определению ГЛ, ф-ции $\psi^k(x, x')$ должны быть бесконечно дифференцируемы. Разложение их в ряд Тейлора имеет вид

$$\psi^k(x, x') = x^k + x'^k + B_i{}^k_j x^i x'^j + \ldots,$$

где многоточие обозначает члены более высоких порядков. Тогда величины $C_i{}^k_j = B_i{}^k_j - B_j{}^k_i$ являются структурными константами и определяют соответствующую алгебру Ли. Существуют также способы построения алгебры Ли по ГЛ, не использующие явно систему координат. Для изучения ГЛ важны о д н о п а р а м е т р и ч. п о д г р у п п ы (т. е. одномерные ГЛ). Параметр t в такой подгруппе выбирают так, чтобы выполнялись равенства $x(0) = e$, $x(t)\;x(s) = x(t+s)$. Существует взаимно однозначное соответствие между однопараметрич. подгруппами в ГЛ G и элементами её алгебры Ли $\mathfrak{g}$: подгруппе $x(t)$ соответствует касательный вектор $\dot{x}(0)$.

Э к с п о н е н ц и а л ь н о е о т о б р а ж е н и е алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в ГЛ G определяют так: $\exp X = x(1)$, где $x(t)$ — однопараметрич. подгруппа, соответствующая элементу X. Для матричных ГЛ отображение exp совпадает с обычной экспонентой: $\exp X = \sum_{k=0}^{\infty} X^k/k!$. Обратное отображение (определённое только в нек-рой окрестности единицы) иногда обозначают ln. С помощью экспоненц. отображения в ГЛ G определяют к а н о н и ч. с и с т е м у к о о р д и н а т: координатами точки $g = \exp X$ служат коэф. разложения $X = \ln g$ по базису в алгебре Ли: $X = \sum_{i=1}^{n} c_i X_i$. Осн. свойство экспоненц. отображения — его ф у н к т о р и а л ь н о с т ь, к-рая выражается коммутативной диаграммой:

$$\begin{array}{ccc} G_1 & \xrightarrow{\varphi} & G_2 \\ \exp\uparrow & & \uparrow\exp \\ \mathfrak{g}_1 & \xrightarrow{\varphi'(e)} & \mathfrak{g}_2 \end{array},$$

где φ — любой гомоморфизм ГЛ G_1 в ГЛ G_2, а $\varphi'(e)$ — производная отображения в точке e. Это значит, что в канонич. координатах любой гомоморфизм ГЛ записывается линейными ф-циями.

Наиб. важными примерами ГЛ являются Г. $GL(n, \mathbb{R})$ всех невырожденных (обратимых) $n \times n$ матриц с веществ. элементами и Г. $GL(n, \mathbb{C})$ всех невырожденных $n \times n$ матриц с комплексными элементами. Координатами в этих Г. могут служить сами матричные элементы. Поэтому $GL(n, \mathbb{R})$ — это веществ. ГЛ размерности n^2, а $GL(n, \mathbb{C})$ — комплексная ГЛ размерности n^2 (к-рую можно рассматривать как веществ. ГЛ размерности $2n^2$). Алгеброй Ли группы $GL(n, \mathbb{R})$ [соответственно $GL(n, \mathbb{C})$] является пространство всех $n \times n$ матриц с веществ. (соответственно комплексными) элементами. Она обозначается через $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ [соответственно $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$].

В назв. матричных ГЛ отражены свойства их элементов. В общем случае ставят букву L (линейность), унитарность отмечают буквой U, ортогональность — буквой O. Если матрицы имеют единичный определитель (унимодулярны), в назв. Г. ставят букву S. В скобках после названия указывают ранг (число строк) матриц,