а сложением, вместо gg' используют обозначение $g+g'$, а элемент e наз. нулём.

С точки зрения групповой структуры, природа элементов Г. несущественна. Г. задана, если любым способом описаны все её элементы и определена групповая операция над ними. Напр., в конечной Г. (содержащей конечное число элементов, наз. порядком Г.) групповую операцию можно задать с помощью табл. умножения. В приложениях Г. возникает обычно в нек-рой конкретной реализации, её элементами могут быть, напр., числа, матрицы, операторы и т. д. При этом групповую операцию можно задавать как сложение или умножение чисел, умножение матриц или операторов и т. п. Наиб. распространение имеет реализация элементов Г. как преобразований, т. е. взаимно однозначных отображений разл. множеств на себя, $g: X \to X$. Групповой операцией в этом случае является композиция отображений, $(gg')(x) = g(g'(x))$, такое определение гарантирует ассоциативность умножения.

Часто группу G задают как Г. всех преобразований данного множества X, сохраняющих нек-рую матем. структуру, введённую на этом множестве. Так, если X — конечное множество (без какой бы то ни было дополнит. структуры), то G состоит из всех перестановок точек X; если X — векторное пространство, то G — совокупность всех линейных невырожденных преобразований X; если X — вещественное евклидово (соответственно комплексное гильбертово) пространство, то G — совокупность ортогональных (соответственно унитарных) преобразований; если X — гладкое многообразие (точки к-рого в каждой достаточно малой окрестности задаются координатами, а переход от одной системы координат к другой описывается гладкими ф-циями), то G — совокупность всех диффеоморфизмов (взаимно однозначных преобразований, описывающихся гладкими ф-циями в любой системе координат).

Подмножество K в группе G наз. подгруппой, если оно само является Г. относительно той же групповой операции. Подмножество gK, состоящее из элементов вида gk, где $k \in K$, наз. левым смежным классом элемента g по подгруппе K. Два смежных класса gK, $g'K$ либо не имеют ни одного общего элемента, либо полностью совпадают (последнее имеет место при $g' \in gK$). Т. о., группа G разбивается на непересекающиеся смежные классы. Можно рассматривать смежные классы как элементы нек-рого нового множества. Оно наз. фактор-пространством Г. G по подгруппе K и обозначается G/K. Аналогично можно ввести и правые смежные классы Kg, к-рые также осуществляют (вообще говоря, другое) разбиение Г. Множество правых классов также наз. фактор-пространством и обозначается $K \diagdown G$.

Подгруппа $K \subset G$ наз. инвариантной подгруппой (или нормальным делителем), если для любого $g \in G$ имеет место $gKg^{-1} = K$ (т. е. $gkg^{-1} \in K$, коль скоро $k \in K$). В случае инвариантной подгруппы правые смежные классы совпадают с левыми, $Kg = gK$. В этом случае умножение на Г. естеств. образом определяет умножение смежных классов: $(gK)(g'K) = (gg')K$, так что фактор-пространство G/K превращается в Г. Эта Г. наз. фактор-группой G по K. Напр., в группе Пуанкаре P выделяют две подгруппы: Г. трансляций T и *Лоренца группу* L. Подгруппа T инвариантна в P. Фактор-группа P/T изоморфна L (об изоморфизме см. ниже). Примером инвариантной подгруппы является центр группы G, т. е. множество элементов, каждый из к-рых коммутирует со всеми остальными элементами Г.

Отображение $\varphi: G_1 \to G_2$ одной Г. на другую наз. изоморфизмом, если это отображение взаимно однозначно и согласовано с групповым умножением в обеих Г., т. е. если $\varphi(gg') = \varphi(g)\varphi(g')$ для любых g, $g' \in G_1$. В этом случае Г. G_1 и G_2 наз. изоморфными, что обозначают $G_1 \approx G_2$ или $G_1 = G_2$. Изоморфизм Г. на ту же самую Г. (на себя) наз. автоморфизмом. Изоморфные Г. не отличаются с точки зрения своей внутр. групповой структуры. Когда говорят об абстрактной Г., имеют в виду, что Г. задана с точностью до изоморфизма (т. е. задан на самом деле лишь класс изоморфных друг другу Г.). Наоборот, конкретная реализация Г. означает выбор одной определённой Г. из класса изоморфных. Напр., Г. $\mathbb{R}$ всех веществ. чисел со сложением в качестве групповой операции изоморфна Г. $\mathbb{R}_+$ положит. чисел с умножением в качестве групповой операции (изоморфизм в одном направлении осуществляется операцией exp, в обратном — операцией ln). Можно считать, что $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}_+$ это разные реализации одной и той же абстрактной Г. Ещё одной реализацией той же Г. является Г. сдвигов (трансляций) веществ. прямой. Точно так же разл. реализациями одной и той же абстрактной Г. являются окружность (со сложением углов в качестве групповой операции), Г. движений окружности, Г. поворотов плоскости и Г. всех комплексных чисел, по модулю равных единице (с умножением в качестве групповой операции). Соответствующую абстрактную Г. часто обозначают через $\mathbb{T}$ или $\mathbb{T}^1$ (одномерный тор, т. е. окружность).

Более общим, чем изоморфизм, является понятие гомоморфизма Г. Отображение $\varphi: G_1 \to G_2$ одной Г. в другую наз. гомоморфизмом, если оно согласовано с групповым умножением в обеих Г. В этом случае не требуется, чтобы образ отображения $\varphi(G_1)$ совпадал с группой G_2. Он может быть подгруппой в G_2. Не требуется и взаимной однозначности отображения, так что одному элементу в $\varphi(G_1)$ может соответствовать более чем один прообраз в G_1. Множество прообразов единицы, $\varphi^{-1}(e_2)$, образует в G_1 инвариантную подгруппу, наз. ядром гомоморфизма. Фактор-группа $G_1/\varphi^{-1}(e_2)$ изоморфна группе $\varphi(G_1)$.

Если G' — группа линейных преобразований (невырожденных операторов) в нек-ром линейном пространстве L, то гомоморфизм $U: G \to G'$ наз. представлением группы G (точнее, линейным представлением). Т. о., линейное представление каждому элементу g группы G ставит в соответствие невырожденный линейный оператор $U(g)$, причём произведению элементов Г. соответствует произведение операторов, $U(g_1g_2) = U(g_1)U(g_2)$.

В более общем случае, когда G' — Г. преобразований множества X любой природы, говорят, что гомоморфизм $\varphi: G \to G'$ определяет действие группы G на X (иногда такой гомоморфизм наз. нелинейным представлением группы). Вместо $\varphi(g)x$ результат действия элемента g на точку x обозначают иногда gx.

Пространство X, на к-ром задано действие группы G, наз. G-пространством. Если Г. действует транзитивно, т. е. для любой пары точек x, $x' \in X$ найдётся элемент группы g, переводящий одну из этих точек в другую, $x' = gx$, то X наз. однородным пространством. Фактор-пространство всегда является однородным пространством. Напр., группа Лоренца L не является инвариантной подгруппой в группе Пуанкаре P, поэтому фактор-пространство P/L является однородным пространством, но не фактор-группой. Любое G-пространство представляется в виде объединения непересекающихся подпространств, в каждом из к-рых Г. действует транзитивно. Эти подпространства наз. областями транзитивности или орбитами группы. Стационарной подгруппой (стабилизатором) нек-рой точки $x_0 \in X$ наз. множество элементов Г., оставляющих эту точку на месте.

Прямым произведением групп G_1 и G_2 наз. множество пар (g_1, g_2), где $g_1 \in G_1$, $g_2 \in G_2$, с определённой на этом множестве операцией умножения $(g_1, g_2)(g_1', g_2') = (g_1g_1', g_2g_2')$. Т. о., прямое произведение Г. также является Г., к-рая обозначается $G_1 \otimes G_2$