келя; $G_0(x, x') = -(4\pi|x-x'|)^{-1} \exp(ik|x-x'|)$ при $n=3$.

5. Волновое ур-ние: $L = \Box_a = \partial^2/\partial t^2 - a^2\Delta$, $G_0(x, t) = (2a)^{-1}\theta(at-|x|)$ при $n=1$, $G_0(x, t) = (2\pi a)^{-1}(a^2t^2-|x|^2)^{-1/2}\theta(at-|x|)$ при $n=2$; $G_0(x, t) = (2\pi a)^{-1}\theta(t)\delta(a^2t^2-|x|^2)$ при $n=3$, для упрощения принято $x'=t'=0$. Полученная Г. ф. наз. запаздывающей, поскольку она обращается в нуль при $t-t'<0$. Подставляя Г. ф. в (3), получим решение неоднородного волнового ур-ния в виде

$$u(x, t) = (a^2/4\pi)\int dx'|x-x'|^{-1} f(x', t-a^{-1}|x-x'|),$$

носящем в электродинамике назв. *запаздывающего потенциала*.

6. Ур-ние Клейна – Гордона: $L = \Box_a + m^2$, $G_0(x, t) = (2\pi a)^{-1}\theta(at)\delta(a^2t^2-|x|^2) - (m/4\pi a^3)\theta(at-|x|)(t^2-a^{-2}|x|^2)^{-1/2} J_1(m\sqrt{t^2-a^{-2}|x|^2})$ при $n=3$, где J_1 — ф-ция Бесселя. Полученная Г. ф. также наз. запаздывающей.

Г. ф. играет важную роль также в задачах о спектре дифференц. операторов. Если самосопряжённый оператор L имеет Г. ф., то задача на собств. значения $Lu=\lambda u$ эквивалентна интегральному ур-нию $u(x) = \lambda\int G(x, x')\,u(x')dx'$, к к-рому можно применить теорию Фредгольма. Задача $Lu=\lambda u$ имеет не более счётного числа собств. значений $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$, все λ_i вещественны и не имеют конечных точек сгущения. Если комплексное число λ не является собств. значением оператора L, то можно построить Г. ф. $G(x, x'; \lambda)$ оператора $L-\lambda I$, где I — единичный оператор. Ф-ция $G(x, x'; \lambda)$, наз. резольвентой оператора L, является мероморфной функцией параметра λ, причём её полюсами служат собств. значения оператора L. Т. о., спектр оператора L можно найти, изучая его резольвенту $G(x, x'; \lambda)$.

При изучении систем ур-ний $\boldsymbol{Lu}=\boldsymbol{f}$ роль Г. ф. играют т. н. матрицы Грина. Они позволяют выразить решение неоднородной краевой задачи для системы в виде интегралов от произведений матрицы Грина на векторы правой части системы. Для подобных задач полезен интеграл Дюамеля. Напр., частное решение неоднородной системы $\boldsymbol{u}' = A(x)\boldsymbol{u} + \boldsymbol{F}(x)$, где $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{F}$ — n-компонентные векторы, $A(x)$ — квадратная матрица порядка n, записывают в виде $\boldsymbol{u}(x) = \int_{x_0}^{x}\boldsymbol{w}(x, s)ds$, где $\boldsymbol{w}(x, s)$ — решение однородной системы $\boldsymbol{w}' = A(x)\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{w}(x, s)|_{x=s} = \boldsymbol{F}(s)$. Матрица $A(x)$ может содержать дифференц. операторы, поэтому метод применим к ур-ниям с частными производными.

Лит.: Морс Ф. М., Фешбах Г., Методы теоретической физики, пер. с англ., т. 1, М., 1958; Курант Р., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1964; Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1981.

Л. П. Купцов.

ГРИНА ФУНКЦИЯ в квантовой теории поля — одна из осн. величин, определяющих движение частиц и состояние полей; представляет собой среднее по вакууму от *хронологического произведения* операторов полей. По своему смыслу понятие Г. ф. в квантовой теории поля (КТП) близко к понятию Г. ф. в матем. физике и используется в тех же целях — как вспомогат. величина при расчётах физ. характеристик и решении ур-ний при заданных источниках.

В квантовой механике частицы волновая ф-ция $\psi(x)$ определяется ур-нием вида $L(x)\psi(x)=0$, где $L(x)$ — нек-рый оператор, x — точка пространства-времени. Здесь Г. ф. $G(x, x')$ определяется ур-нием $L(x)G(x, x') = \delta(x-x')$ [где $\delta(x-x')$ — *дельта-функция*] и, следовательно, имеет точно такой же смысл, как в матем. физике. В КТП волновую ф-цию частицы заменяет величина $u(x)|0\rangle$, где $u(x)$ — оператор поля, $|0\rangle$ — *вектор состояния* вакуума. Для свободных полей одночастичная (двухточечная) Г. ф., наз. иначе функцией распространения или пропагатором,

$$D^c(x-x') = \langle 0|Tu(x)\,u(x')|0\rangle \qquad (1)$$

(где T — знак хронологич. упорядочения, а скобки $\langle 0|\ldots|0\rangle$ означают усреднение по вакууму), является Г. ф. неоднородного ур-ния поля, т. е. удовлетворяет ур-нию с точечным источником. Напр., для скалярного поля пропагатор удовлетворяет неоднородному *Клейна — Гордона уравнению*

$$(\Box - m^2)\,D^c(x) = -\delta(x) \qquad (2)$$

($\Box$ — *Д'Аламбера оператор*, m — масса кванта поля; используется система единиц $\hbar=c=1$).

С физ. точки зрения, ф-ция $D^c(x-x')$ — т. н. причинная функция Грина — описывает причинную связь процессов рождения и уничтожения частицы в разл. точках x, x'.

Полное решение ур-ния (2) представляется в виде частного решения неоднородного ур-ния и общего решения однородного ур-ния. Решением однородного ур-ния являются т. н. *перестановочная функция* Паули — Йордана $D(x)$ и её частотные компоненты $D^{\pm}(x)$. К частным решениям неоднородного ур-ния (2), помимо введённой выше причинной (индекс c) Г. ф., относятся известные из классич. теории взаимодействующих полей запаздывающая (ret) и опережающая (adv) Г. ф. С помощью фурье-преобразования получаются след. представления для Г. ф. скалярного поля:

$$D^c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4k\,\exp(-ikx)}{m^2-k^2-i\varepsilon},$$

$$D^{\substack{\mathrm{ret}\\ \mathrm{adv}}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4k\,\exp(-ikx)}{m^2-k^2\mp 2ik_0\varepsilon}, \qquad \varepsilon \longrightarrow +0.$$

где k — 4-импульс виртуальной частицы. Бесконечно малая добавка в знаменателе этих выражений определяет правила обхода полюсов в точке $k^2=m^2$ при интегрировании в комплексной плоскости энергии k_0 и однозначно задаёт данную Г. ф.

Причинные Г. ф. спинорного и векторного полей могут быть выражены через причинную Г. ф. скалярного поля действием дифференц. операторов, стоящих в ур-ниях для соответствующих свободных полей.

Г. ф. свободных полей являются одним из основных составных элементов *Фейнмана диаграмм*.

Обобщением свободных одночастичных Г. ф. на случай наличия взаимодействия являются многочастичные, или n-точечные, Г. ф.

$$G_n(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\langle 0|T\{u_1(x_1)\ldots u_n(x_n)\,S\}|0\rangle}{\langle 0|S|0\rangle}. \qquad (3)$$

Здесь $u_i(x_i)$ — операторы полей во *взаимодействия представлении*, S — *матрица рассеяния*. В *перенормированной теории возмущений* Г. ф. (3) содержат все *радиационные поправки*, соответствующие как связным, так и несвязным диаграммам Фейнмана с n внеш. линиями, и представляются в виде степенного ряда по *константе взаимодействия* [при этом все вакуумные вклады, пропорциональные $\langle 0|S|0\rangle$, факторизуются и сокращаются со знаменателем в (3)]. Такие Г. ф. наз. полными функциями Грина.

Важными величинами являются также т. н. связные и сильносвязные (или одночастично неприводимые) Г. ф., представляющие собой сумму соответственно связных и сильносвязных диаграмм Фейнмана. Пример сильносвязной Г. ф. — *вершинная часть*. Связные и сильносвязные Г. ф. входят в систему *Дайсона уравнений*.

Полные Г. ф. могут быть также определены через *функциональный интеграл*; такое определение особенно полезно при квантовании *калибровочных полей*.

Лит.: Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б., Квантовая электродинамика, 4 изд., М., 1981; Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Квантовые поля, М., 1980.

Д. И. Казаков.