Известна также ф-ла, выведенная Дж. Грином (G. Green) в 1828:

$$\iiint_V (u \cdot \Delta v - v \cdot \Delta u)\, dV = \iint_S \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS,$$

где V — трёхмерная область, S — её граница, Δ — *Лапласа оператор*, $\partial/\partial n$ — производная по направлению внеш. нормали к S. Эта ф-ла справедлива и в k-мерном пространстве, существуют также обобщения её на случай произвольных линейных дифференц. операторов. При помощи Г. ф. получают интегр. представления для решений разл. краевых задач.

В. И. Алхимов.

ГРИ́НА ФУ́НКЦИЯ линейного дифференциального оператора L (линейного дифференц. ур-ния $Lu(x)=f(x)$) — функция $G(x,\ x')$, задающая ядро интегр. оператора, обратного к L. Поскольку ядром единичного оператора является *дельта-функция* $\delta(x-x')$, Г. ф., трактуемая как обобщённая ф-ция, удовлетворяет ур-нию

$$L_x G(x,\ x') = \delta(x-x'). \qquad (1)$$

Всякое решение ур-ния (1) наз. фундаментальным решением исходного дифференц. ур-ния; следовательно, Г. ф.— также нек-рое фундам. решение. Из (1) следует, что при $x \neq x'$ Г. ф. удовлетворяет однородному ур-нию $L_x G = 0$. Решение неоднородного ур-ния

$$Lu(x) = f(x) \qquad (2)$$

определяется интегралом

$$u(x) = \int G(x,\ x')\, f(x')\, dx'. \qquad (3)$$

Г. ф. $G(x,\ x')$ представляет собой «отклик» в точке x системы, описываемой дифференц. ур-нием, на единичный точечный источник, помещённый в точку x'. По этой причине Г. ф. часто наз. также ф-цией источника. Для самосопряжённого оператора L Г. ф. $G(x,\ x')$ удовлетворяет соотношению взаимности $G(x,\ x') = G^*(x',\ x)$ ($*$ означает комплексное сопряжение), т. е. отклик в точке x на точечное возмущение в x' равен отклику в x' на точечное возмущение в x. Впервые Г. ф. введена Дж. Грином (G. Green) в 1828. Г. ф.— существенная часть матем. аппарата совр. физики. Интегр. соотношение (3), заменяющее дифференц. ур-ние (2), позволяет представить поле, созданное нек-рой системой источников, в виде суперпозиции вкладов отдельных точечных источников; оно удобно для построения теории возмущений и т. п.

Чтобы задать дифференц. оператор L, нужно, кроме операции дифференцирования, определить ещё класс ф-ций, на к-рые действует эта операция. Ограничения на ф-ции диктуются физ. постановкой задачи и выступают обычно в виде нек-рого числа краевых условий, к-рым подчинены ф-ции $u(x)$. Г. ф. дифференц. оператора наз. также Г. ф. соответствующей *краевой задачи*. Г. ф. $G(x,\ x')$ краевой задачи удовлетворяет краевым условиям по x при любом фиксированном x'. Поэтому если $G_0(x,\ x')$ — любое фундам. решение ур-ния (не обязательно удовлетворяющее краевым условиям), то Г. ф. $G(x,\ x')$ представляется в виде суммы:

$$G(x,\ x') = G_0(x,\ x') + g(x,\ x'), \qquad (4)$$

где $g(x,\ x')$ — решение однородного ур-ния $L_x g(x,\ x') = 0$, выбранное так, чтобы ф-ция $G(x,\ x')$ удовлетворяла заданным краевым условиям. Построить Г. ф. в явном виде удаётся в сравнительно небольшом числе случаев для нек-рых видов областей.

Ниже даны примеры конкретных Г. ф.

1. Обыкновенное дифференц. ур-ние на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$. Пусть $L = \sum_{k=0}^{n} p_k(x)\, d^k/dx^k$, а краевые условия представляют собой n линейных соотношений между значениями $u^{(j)}(a)$ и $u^{(i)}(b)$, $0 \leqslant i,\ j \leqslant n-1$, младших производных ф-ции $u(x)$ на концах отрезка. Тогда Г. ф., удовлетворяя при каждом x' краевым условиям по x и при $x \neq x'$ — однородному ур-нию $L_x G(x,\ x') = 0$, должна иметь в точке $x = x'$ непрерывные производные вплоть до $(n-2)$-й и разрывную $(n-1)$-ю производную, причём скачок в этой точке равен

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} G(x'+0, x') - \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} (x'-0, x') = \frac{1}{p_n(x')}.$$

Эти требования, дополненные естеств. предположениями о гладкости по переменным x, x' при $x \neq x'$, определяют $G(x,\ x')$. Напр., дифференц. оператор 2-го порядка $L = \frac{d}{dx}\left(p(x) \frac{d}{dx} \right) + q(x)$ с краевыми условиями $u(a) = u(b) = 0$ имеет Г. ф., равную

$$G(x,\ x') = \frac{1}{p(x)\, w(x)} \begin{cases} u_1(x)\, u_2(x') & \text{при } a \leqslant x \leqslant x', \\ u_1(x')\, u_2(x) & \text{при } x' \leqslant x \leqslant b, \end{cases}$$

где $w(x) = u_1(x)\, u_2'(x) - u_2(x)\, u_1'(x)$, а u_1 и u_2 — к.-л. линейно независимые решения ур-ния $Lu = 0$, удовлетворяющие условиям $u_1(a) = u_2(b) = 0$.

2. Ур-ние Лапласа. Пусть $x = (x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)$, $|x| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$, а $\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \dots + \partial^2/\partial x_n^2$. Фундам. решением ур-ния Лапласа $\Delta u(x) = 0$ служит ф-ция

$$G_0(x,\ x') = \begin{cases} (2\pi)^{-1} \ln|x-x'| & \text{при } n=2, \\ -\Gamma(n/2)/2\pi^{n/2}(n-2)\,|x-x'|^{n-2} & \text{при } n \geqslant 3, \end{cases}$$

$\Gamma(n)$ — гамма-функция Эйлера.

В практически важном случае трёхмерного пространства ф-ция $G_0(x,\ x')$ равна $-1/4\pi|x-x'|$. Согласно ф-ле (4), Г. ф. разл. краевых задач для ур-ния Лапласа получают, добавляя к $G_0(x,\ x')$ подходящую *гармоническую функцию*, обеспечивающую выполнение краевых условий. Напр., при $n=3$ для шара $|x| < R$ задаче $\Delta u = f(x)$ с краевым условием $u(x)\big|_{|x|=R} = 0$ отвечает Г. ф.

$$G(x,\ x') = -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{|x-x'|} - \frac{R}{|x'|}\, \frac{1}{|x-\tilde{x}'|} \right],$$

где $\tilde{x}' = R^2 x'/|x'|^2$ — точка, симметричная точке x' относительно сферы $|x| = R$. Аналогичной краевой задаче для полупространства $x_3 > 0$, т. е. краевому условию $u(x)\big|_{x_3=0} = 0$ отвечает Г. ф. вида $G(x,\ x') = -\frac{1}{4\pi} \times \left[\frac{1}{|x-x'|} - \frac{1}{|x-\tilde{x}'|} \right]$, где точка $\tilde{x}'$ симметрична точке $x' = (x_1',\ x_2',\ x_3')$ относительно плоскости $x_3 = 0$, т. е. $\tilde{x}' = (x_1',\ x_2',\ -x_3')$. Г. ф. в этих двух случаях представляет собой потенциал точечного заряда, помещённого в точку x' внутри заземлённой проводящей сферы (1-й случай) или в присутствии заземлённой проводящей плоскости (2-й случай). При $n=2$ Г. ф. *Дирихле задачи* для односвязной области с достаточно гладкой границей имеет вид

$$G(z,\ z') = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{w(z) - w(z')}{1 - w(z)\, w^*(z')} \right|, \quad z = x_1 + i x_2.$$

Здесь $w = w(z)$ — нек-рая ф-ция аргумента $z = x_1 + i x_2$, конформно отображающая область на единичный круг $|w| < 1$.

В след. примерах приводятся только фундам. решения $G_0(x,\ x')$, связанные с Г. ф. соотношением (4).

3. Ур-ние теплопроводности: $L = \partial/\partial t - a^2\Delta$, $G_0(x,\ t;\ x',\ t') = \theta(t-t')\,[4\pi a^2(t-t')]^{-n/2} \times \exp\left[-\frac{|x-x'|^2}{4a^2(t-t')} \right]$, где $\theta(x)$ — ступенчатая ф-ция: $\theta(x) = 0$ при $x < 0$, $\theta(x) = 1$ при $x > 0$.

4. Ур-ние Гельмгольца: $L = \Delta + k^2$, $G_0(x, x') = (2ik)^{-1} \exp(ik|x-x'|)$ при $n=1$; $G_0(x,\ x') = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x-x'|)$ при $n=2$, где $H_0^{(1)}$ — ф-ция Хан-