основано, напр., выделение физ. степеней свободы в калибровочных теориях.

Одним из гл. орудий анализа и конкретных расчётов в Г. п. служат ортонормированные базисы (ОБ). Набор $\{e_\alpha\}$, $\alpha\in A$ элементов Г. п. $\mathscr{H}$ (A — произвольное, не обязательно счётное, множество индексов) наз. ортонормированной системой, если $(e_\alpha, e_\beta)=\delta_{\alpha\beta}$, где символ Кронекера $\delta_{\alpha\beta}$ равен 1 при $\alpha=\beta$ и 0 при $\alpha\neq\beta$. Эта система наз. полной (или замкнутой), если любой вектор, ортогональный ко всем e_α, $\alpha\in A$, равен 0. Всякая полная ортонормированная система наз. ОБ в $\mathscr{H}$. Примеры ОБ: 1) система тригонометрич. ф-ций $\{\exp(2\pi int),\ n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots\}$ в $L^2(0, 1)$; 2) система полиномов Лежандра $P_n(x)$ (см. *Ортогональные полиномы*) в $L^2(-1, 1)$; 3) система полиномов Лагерра $L_n(x)$ в $L^2([0, \infty), e^{-x}dx)$; 4) система полиномов Эрмита $H_n(x)$ в $L^2((-\infty, \infty), e^{-x^2}dx)$. Во всяком Г. п. существует ОБ, все ОБ данного Г. п. равномощны, и их мощность равна размерности $\mathscr{H}$; в частности, $\mathscr{H}$ является сепарабельным тогда и только тогда, когда в нём существует счётный ОБ. Осн. свойство ОБ $\{e_\alpha\}$, $\alpha\in A$: любой вектор $x\in\mathscr{H}$ обладает однозначным разложением в виде $x=\sum_{\alpha\in A}c_\alpha e_\alpha$; при этом $c_\alpha=(x, e_\alpha)$ и $\|x\|^2=\sum_{\alpha\in A}|c_\alpha|^2$.

Последнее равенство наз. равенством Парсеваля, а также, с учётом его очевидной геом. интерпретации, теоремой Пифагора; числовые множители c_α наз. коэф. Фурье вектора x в ОБ $\{e_\alpha\}$. Простота и удобство ОБ сделали их общепринятыми в физ. приложениях, поэтому в физике предпочтительны сепарабельные Г. п., для к-рых существует стандартный метод построения ОБ из произвольной системы линейно независимых векторов $u_1, u_2, \ldots$, имеющей плотную в $\mathscr{H}$ линейную оболочку. Данный метод наз. процессом ортогонализации Грама — Шмидта и состоит в рекурсивном построении ОБ $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ из векторов u_i с помощью вспомогат. системы $\{v_i\}$, определяемой ф-лами:

$$v_1=u_1;\ v_2=u_2-\|v_1\|^{-2}(v_1, u_2)v_1;\ \ldots;$$

$$v_n=u_n-\sum_{k=1}^{n-1}\|v_k\|^{-2}(v_k, u_n)v_k;$$

векторами искомого ОБ тогда будут $e_i=v_i/\|v_i\|$, причём для любого $n=1, 2,\ldots$ линейные оболочки наборов $(e_1, \ldots, e_n)$ и $(u_1, \ldots, u_n)$ совпадают между собой. Указанный процесс служит обычным способом построения ортонормированных систем ф-ций; в частности, все ортогональные полиномы в примерах 2—4 получаются путём ортогонализации системы одночленов 1, x, x^2, ... в соответствующих Г. п.

Применения Г. п. В матем. и физ. приложениях возникают разл. классы пространств, являющихся обобщениями Г. п.: 1) пространства l^p и L^p, $p\geqslant 1$. Пространство l^p — совокупность всех числовых последовательностей $x=\{x_n\}$, удовлетворяющих условию: $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p<\infty$. Это линейное нормированное пространство с нормой $\|x\|=\left\{\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right\}^{1/p}$. $L^p(a, b)$ — совокупность всех комплекснозначных ф-ций, суммируемых с p-й степенью на промежутке $[a, b]$, есть также линейное нормированное пространство с нормой $\|f\|=\left[\int_a^b|f(x)|^p dx\right]^{1/p}$ (ф-ции, совпадающие между собой почти всюду по мере Лебега на $[a, b]$, отождествляются). Осн. область применений этих пространств составляют ур-ния матем. физики. 2) Пространства с *индефинитной метрикой*, со скалярным произведением $\langle x, y\rangle$, не удовлетворяющим, вообще говоря, аксиомам 1 и 4. В конечномерном случае такие пространства наз. псевдоевклидовыми, к их числу принадлежит, в частности, *Минковского пространство-время* без учёта кривизны. В бесконечномерном случае наиб. важный класс пространств с индефинитной метрикой образуют т. н. J-пространства, или пространства Крейна. В них, наряду с индефинитным скалярным произведением $\langle x, y\rangle$, действует также обычное скалярное произведение (x, y), по отношению к к-рому каждое такое пространство $\mathscr{H}$ является Г. п.; оба произведения связаны между собой посредством т. н. метрич. оператора, или оператора Грама J: $\langle x, y\rangle=(x, Jy)$ для всех $x, y\in\mathscr{H}$; $J=P_+-P_-$, где $P_\pm$ — проекционные операторы в $\mathscr{H}$, такие, что $P_++P_-=I$ (I — единичный оператор). Пространства Крейна применяют в механике и в ряде моделей *квантовой теории поля*; они используются для строгой формулировки калибровочной квантовой теории поля. 3) Оснащённые Г. п. (ОГП) представляют собой расширения Г. п. $\mathscr{H}$, включающие не содержащиеся в $\mathscr{H}$ элементы и получаемые с помощью выделения плотного линейного подмножества Ω в Г. п. (любой элемент из $\mathscr{H}$ является пределом последовательности элементов из Ω). Подмножество Ω можно наделить своей топологией, более сильной, чем топология $\mathscr{H}$, и определить сопряжённое топологич. пространство Ω^*; поскольку из $\Omega\subset\mathscr{H}$ следует, что $\Omega^*\supset\mathscr{H}^*$, а $\mathscr{H}^*=\mathscr{H}$ (с точностью до изоморфизма), получается конструкция из 3 пространств — триплет $\Omega\subset\mathscr{H}\subset\Omega^*$, к-рый и носит назв. ОГП. Введение расширенного пространства Ω^* — стандартный приём при рассмотрении неограниченных операторов и операторов с непрерывным спектром. Поскольку такие операторы типичны для физ. задач (напр., операторы координаты и импульса), то ОГП находят применение во мн. областях физики. Одна из таких областей — аксиоматич. квантовая теория поля, весь формализм к-рой можно развить исходя из ОГП $S(\mathbb{R}^4)\subset L^2(\mathbb{R}^4)\subset S^*(\mathbb{R}^4)$, где S — пространство осн. ф-ций Шварца, а S^* — сопряжённое к нему пространство *обобщённых функций* умеренного роста.

Сфера применений Г. п. в совр. физике почти необозрима. Г. п.— центральный матем. объект, лежащий в основе всего аппарата квантовой физики. Представление множества состояний физ. системы с помощью Г. п. есть фундам. элемент матем. структуры в самом широком спектре физ. теорий: квантовой механике, квантовой статистич. физике, классич. и квантовой теории поля; оно является возможным также и в классич. механике. Такой же универсальностью обладает и представление наблюдаемых физ. систем с помощью самосопряжённых операторов в Г. п. Наиб. тесная связь, достигающая почти полного сращивания между физ. и матем. исследованием, сложилась между аппаратом Г. п. и квантовой механикой. Наконец, широкие и разнообразные применения Г. п. находят при изучении ур-ний матем. физики, описывающих разл. физ. процессы.

Лит.: Ахиезер Н. И., Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 2 изд., М., 1966; Морен К., Методы гильбертова пространства, пер. с польск., М., 1965; Халмош П., Гильбертово пространство в задачах, пер. с англ., М., 1970; Рихтмайер Р., Принципы современной математической физики, пер. с англ., т. 1, М., 1982.

С. С. Хоружий.

ГИНЗБУРГА ЧИСЛО — безразмерная постоянная, характеризующая интенсивность тепловых флуктуаций параметра порядка при фазовом переходе 2-го рода. Назв. по имени В. Л. Гинзбурга. Г. ч. можно выразить через радиус взаимодействия частиц в системе r_0 и характерную величину радиуса корреляции r_c вдали от точки перехода: $Gi\approx(r_0/r_c)^6$. Г. ч. определяет область применимости *Ландау теории* фазовых переходов 2-го рода: $Gi\ll|(T-T_c)/T_c|\ll 1$, где T — темп-ра, T_c — критич. темп-ра. Для существования области применимости теории Ландау необходимо выполнение условия $Gi\ll 1$. Это условие выполняется для сверх-