сона $\{H_i, H_j\}=0$. Интегрируемость приводит к след. картине движения Г. с. Пусть градиенты ф-ций H_i линейно независимы в изучаемой области фазового пространства, а движение финитно и происходит внутри области. Любая траектория остаётся в пересечении гиперповерхностей $H_i\ (p, q)=h_i$ с фиксиров. h_i. Компонента этого пересечения топологически эквивалентна n-мерному тору T^n (T^1 — обычная окружность, T^2 — произведение двух окружностей, поверхность «бублика», стандартный тор T^n — это множество в $R^{2n}=R^2\times\ldots\times R^2$, к-рое при проекции на каждое R^2 даёт окружность). Можно так задать циклич. координаты $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ на торе T^n, что движение по тору определяется ур-ниями $\dot\varphi_i=\omega_i$, $i=1, \ldots, n$, где $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ — вектор частот, т. е. движение условно-периодично. Вся область, где градиенты H_i линейно независимы, расслоена на такие торы, можно ввести спец. координаты (I, φ) (переменные действие — угол), в к-рых $H=H(I)$.

Движение на самом торе зависит от частот ω (к-рые, *вообще говоря*, меняются от тора к тору). Если между частотами $\omega_1, \ldots, \omega_n$ нет линейных зависимостей вида $n_i\omega_i=0$ с целыми коэф., то траектория подходит сколь угодно близко к любой точке тора. Если же существуют соотношения $\sum_i n_i\omega_i=0$ (т. н. резонанс частот), то n-мерный тор T^n расслаивается на торы меньшей размерности T^k, $n-k$ равно числу независимых линейных соотношений.

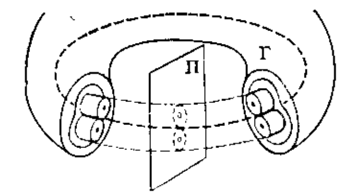

Рис. 1. Часть трёхмерного уровня энергии.

Строение множества $\{H_i=h_i\}$, $i=1, \ldots, n$, содержащего точки, где градиенты ф-ций H_i зависимы, может быть различным. В частности, оно может содержать вырожденные торы (размерности меньшей n), к к-рым асимптотически приближаются др. траектории, образуя т. н. «усатый», или седловой, тор. Вырожденным случаем седлового тора является седловое периодич. движение Г, к-рое изображено на рис. 1 пунктирной линией.

Неинтегрируемые системы. Обычно интегрируемые Г. с. получаются при нек-рых спец. значениях параметров, входящих в H. Пусть, для простоты, имеется один малый параметр ε и при $\varepsilon=0$ система интегрируема. Тогда в области, где введены переменные действие — угол (I, φ), её ф-цию Гамильтона можно записать в виде $H=H_0(I)+\varepsilon H_1(I, \varphi, \varepsilon)$. А. Пуанкаре (H. Poincaré) считал изучение такой Г. с. «осн. задачей динамики». Движение в такой Г. с. для большинства нач. условий описывается КАМ-теорией [А. Н. Колмогоров, В. И. Арнольд, Ю. Мозер (J. Moser)]. При малых ε осн. часть торов интегрируемой Г. с. сохраняется, лишь слегка деформируясь; движение на каждом таком торе остаётся условно-периодическим.

Но разрушение структуры интегрируемой Г. с. всё же происходит, одной из его причин является расщепление ранее совпадавших устойчивых и неустойчивых многообразий седловых периодич. движений (см. периодич. траекторию Г на рис. 1). В окрестности этого множества образуется т. н. стохастич. слой, движение внутри к-рого крайне нерегулярно и практически неотличимо от случайного. Нек-рое представление о нём даёт рис. 2, где представлено поведение следов устойчивого и неустойчивого многообразий седловой траектории Г на секущей площадке П (см. рис. 1). Кроме стохастич. слоёв, возникающих в окрестности седловых периодич. движений, образуются также стохастич. слои (гораздо более узкие) из-за разрушения нек-рой малой части торов, в первую очередь тех, движение на к-рых было чисто периодическим ($\omega_i=n_i\nu$, n_i — целые, $i=1, \ldots, n$). При разрушении такого тора образуется «гирлянда» из седловых и устойчивых периодич. движений (см. рис. 3). Устойчивые многообразия седловых периодич. движений пересекаются, и образуется стохастич. слой. Т. о., фазовое пространство Г. с., близкой к интегрируемой, характеризуется свойством разделённости: в б. ч. его движение похоже на поведение интегрируемой Г. с., траектории лежат на торах, заполненных условно-периодич. траекториями. В то же время в нек-рой части движение приобретает свойства случайного процесса (квазислучайно).

Следует отметить, что в случае двух степеней свободы сохраняющиеся при малых ε двумерные торы перегораживают трёхмерный уровень энергии $H=\text{const}$, поэтому имеется нек-рая устойчивость (по переменным действия): стохастич. слои между собой не перекрываются. Однако при $n\geqslant 3$ возникает неустойчивость, к-рая при сколь угодно малом $\varepsilon>0$ позволяет траектории из одного стохастич. слоя переходить в другой и тем самым уходить далеко по I (диффузия Арнольда). Скорость такой диффузии экспоненциально мала (по ε), но всё же на больших временах устойчивость она нарушает. Нек-рые численные эксперименты на ЭВМ показывают, что с ростом ε всё большее число торов разрушается и в конце концов стохас-

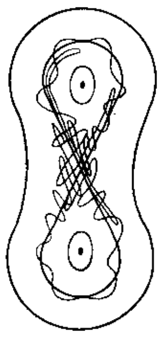

Рис. 2. Стохастический слой.

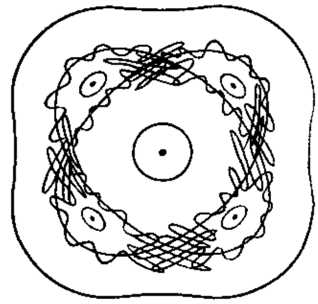

Рис. 3. Разрушенный тор.

тич. движение системы происходит по всему трёхмерному уровню энергии $H=\text{const}$. При такой «развитой» стохастичности движение обладает свойством эргодичности, т. е. для любой ф-ции $F(p, q)$ среднее по времени равно среднему по пространству (по объёму на уровне энергии, к-рый также сохраняется; см. *Эргодическая теория*).

Обобщения. В общем случае для задания Г. с. на чётномерном пространстве размерности $2n$ нужно определить скобку Пуассона любых двух ф-ций f, g, удовлетворяющую обычным свойствам билинейности, антисимметричности и невырожденности, а также тождеству Якоби. В локальных координатах x_i эта операция имеет вид $\{f, g\}=\sum_{i,k=1}^{2n} w^{ik}(x)\,(\partial f/\partial x_i)\,(\partial f/\partial x_k)$, причём матрица $w^{ik}(x)$ невырождена, $w^{ik}=-w^{ki}$ и выполняется тождество

$$\frac{\partial W_{ik}}{\partial x_l}+\frac{\partial W_{li}}{\partial x_k}+\frac{\partial W_{kl}}{\partial x_i}=0,$$

где $W=w^{-1}$ — обратная матрица. Выбирая теперь произвольную ф-цию $H(x)$, можно определить для каждой ф-ции $f(x)$ её траекторию $F(x, t)$, $F(x, 0)=f(x)$, из ур-ния $\partial F/\partial t=\{F, H\}$. Это линейное однородное ур-ние с частными производными 1-го порядка, характеристиками к-рого являются ур-ния Гамильтона $dx_i/dt=\sum_k w^{ik}\partial H/\partial x_k$. Около каждой точки можно так ввести координаты, что в них матрица $w^{ik}(x)$ примет стандартный вид $\begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}$, где E — n-мерная единичная матри-