В общем случае Г. ф. $H(q_i, p_i, t)$ может быть определена через *Лагранжа функцию* $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ равенством

$$H(q_i, p_i, t) = \left[\sum_i p_i\dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i, t)\right]_{\dot{q}_i \to p_i},$$

в к-ром все $\dot{q}_i$ должны быть выражены также через p_i.

Г. ф., как и ф-ция Лагранжа, полностью характеризует ту систему, для к-рой она определена, т. к., зная $H(q_i, p_i, t)$, можно составить дифференц. ур-ния движения системы или в виде $2s$ обыкновенных дифференц. ур-ний 1-го порядка, где s — число степеней свободы, или в виде одного ур-ния в частных производных тоже 1-го порядка (см. *Гамильтона — Якоби уравнение*). Г. ф. введена У. Р. Гамильтоном (W. R. Hamilton).

Наряду с термином «Г. ф.» употребляют иногда термин «главная ф-ция Гамильтона», именуя так полный интеграл ур-ния Гамильтона — Якоби, равный *действию* по Гамильтону. В квантовой механике используется квантовомеханич. оператор — *гамильтониан*, или оператор Гамильтона, соответствующий Г. ф. в классич. механике. *С. М. Тарг.*

ГАМИЛЬТОНА — ЯКОБИ УРАВНЕНИЕ — дифференциальное ур-ние в частных производных 1-го порядка, описывающее движение голономных механич. систем под действием потенц. сил. Чтобы составить Г.— Я. у., необходимо для данной механич. системы знать *Гамильтона функцию* $H(q_i, p_i, t)$, где q_i и p_i — канонич. переменные: обобщённые координаты и обобщённые импульсы, а t — время. Тогда Г.— Я. у. будет иметь вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right), \qquad (1)$$

где правая часть представляет собой выражение ф-ции H, в к-ром все p_i заменены на $\partial S/\partial q_i$, а S — подлежащая определению ф-ция координат q_i и времени t, представляющая собой *действие* по Гамильтону; иногда ф-цию $S(q_i, t)$ наз. главной ф-цией Гамильтона.

В частном случае при движении одной материальной точки в силовом поле, определяемом силовой ф-цией $U(x, y, z, t)$, Г.— Я. у. имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right] - U(x, y, z, t) = 0,$$

где m — масса точки, x, y, z — её координаты.

Г.— Я. у. непосредственно связано с *Гамильтона уравнениями*, к-рые с матем. точки зрения являются для ур-ния (1) ур-ниями характеристик.

Чтобы с помощью Г.— Я. у. найти закон движения механич. системы, надо определить полный интеграл ур-ния (1), т. е. его решение, содержащее столько постоянных интегрирования, сколько в ур-нии независимых переменных. Этими переменными являются координаты q_i и время t; число их равно $s+1$, где s — число степеней свободы системы. Следовательно, полный интеграл ур-ния (1) должен содержать $s+1$ постоянную, из к-рых одна, как аддитивная, может быть отброшена, и имеет вид

$$S = S(t, q_i, \alpha_i). \qquad (2)$$

Если решение Г.— Я. у. в виде (2) будет найдено, то, составив s равенств

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, s), \qquad (3)$$

где β_i — новые произвольные постоянные, получим s алгебраических (недифференциальных) ур-ний, левые части к-рых содержат q_i, α_i и t и из к-рых можно определить q_i в виде

$$q_i = q_i(t, \alpha_i, \beta_i). \qquad (4)$$

Значения др. группы канонич. переменных p_i находят из равенств

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, s). \qquad (5)$$

Ур-ния (4), выражающие q_i как ф-ции t, и определяют положение механич. системы в любой момент времени, т. е. закон её движения. Входящие сюда постоянные α_i и β_i находят подстановкой начальных данных в равенства (4) и (5).

Если ф-ция Гамильтона H явно не содержит время, что, в частности, имеет место для консервативных систем, то S можно искать в виде

$$S = S_0(q_i) - ht,$$

где h — постоянная, равная полной энергии системы, а S_0 — величина, наз. укороченным действием (действием по Лагранжу) или характеристич. ф-цией и определяемая как полный интеграл ур-ния в частных производных

$$H\left(q_i, \frac{\partial S_0}{\partial q_i}\right) = h \qquad (6)$$

в виде

$$S_0 = S_0(q_i, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{s-1}, h).$$

Тогда полный интеграл Г.— Я. у. будет

$$S = S_0(q_i, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{s-1}, h) - ht$$

и закон движения системы определится в соответствии с (3) из равенств

$$\frac{\partial S_0}{\partial \alpha_i} = \beta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, s-1), \qquad (7)$$

$$\frac{\partial S_0}{\partial h} = t + \beta_s. \qquad (8)$$

Ур-ния (7), содержащие в данном случае только q_i, α_i, β_i и не содержащие время t, определяют в многомерном пространстве траекторию точки, изображающей данную механич. систему, а ур-ние (8) даёт закон движения вдоль этой траектории. Значения постоянных α_i, β_i определяются и в этом случае подстановкой начальных данных в равенстве (5), (7) и (8).

Г.— Я. у. и связанный с ним метод решения задач механики играют важную роль и в др. областях физики, особенно в оптике и квантовой механике. В частности, известное в геом. оптике ур-ние *эйконала* подобно Г.—Я. у. в виде (6), где S_0 играет роль эйконала. Этот результат позволяет рассматривать классич. механику как аналог геом. оптики, в к-ром роль поверхностей движущейся волны играют поверхности $S_0(q_i) = \text{const}$, а роль световых лучей — ортогональные к этим поверхностям траектории движения.

Лит. см. при ст. *Действие*. *С. М. Тарг.*

ГАМИЛЬТОНИАН (оператор Гамильтона) — квантовомеханич. оператор, соответствующий *Гамильтона функции* в классич. механике и определяющий эволюцию квантовой системы. В *Шрёдингера представлении* эта эволюция описывается зависимостью от времени *вектора состояния* $|\psi\rangle$ системы, к-рый удовлетворяет Шрёдингера ур-нию

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = \hat{H}|\psi\rangle, \qquad (1)$$

где $\hat{H}$ — гамильтониан. Если классич. ф-ция Гамильтона не зависит явно от времени, то она является интегралом движения и значение её совпадает с энергией системы. Соответственно Г. системы в этом случае является оператором энергии. Ур-ние (1) при этом имеет частные решения в виде стационарных состояний $|\psi\rangle = \exp(-i\mathscr{E}t/\hbar)|\varphi_{\mathscr{E}}\rangle$, где вектор состояния $|\varphi_{\mathscr{E}}\rangle$ не зависит от времени и является собств. вектором Г., соответствующим значению энергии $\mathscr{E}$:

$$\hat{H}|\varphi_{\mathscr{E}}\rangle = \mathscr{E}|\varphi_{\mathscr{E}}\rangle. \qquad (2)$$

Ур-ние (2) определяет спектр энергии системы.

Оператор производной по времени физ. величины f также выражается через коммутатор Г. системы с оператором $\hat{f}$ данной физ. величины:

$$\frac{d\hat{f}}{dt} = \frac{\partial\hat{f}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{f}]. \qquad (3)$$