аргументы во всей области D их определения. Эти условия могут быть интегральными:

$$K=\int_D C\left(f_j,\ \partial f_j/\partial x_i\right) dx_1\ldots dx_n=0$$

или алгебраическими: $C(f_j,\ \partial f_j/\partial x_i)=0$. В обоих случаях задача сводится к обычной введением множителей Лагранжа λ. В первом случае переходят к новому функционалу $\tilde{F}=F+\lambda K$, решают ур-ния Эйлера — Лагранжа, а множитель λ находят из условия $K=0$ на экстремали. Во втором случае вводят новый функционал

$$\tilde{F}=F+\int_D C\lambda(x)\,dx_1\ldots dx_n$$

и неизвестную ф-цию $\lambda(x)$ находят из ур-ний Эйлера — Лагранжа.

В. и. используют в разл. областях физики. Фактически все законы, формулируемые обычно в локальном дифференц. виде, можно сформулировать на вариац. языке. Фундам. примером является *наименьшего действия принцип* в классич. механике. Здесь роль переменной x играет время t, меняющееся в заданном интервале $[a,\ b]$, функциональными аргументами являются обобщённые координаты $q_j(t)$, а называемый *действием* функционал $S[q_j]=\int_a^b \mathscr{L}(q_j,\ \dot{q}_j)\,dt$ задаётся *Лагранжа функцией* $\mathscr{L}$. Согласно принципу наименьшего действия, движение с заданными граничными условиями для $q_j(a)$ и $q_j(b)$ осуществляется по экстремали функционала S. В физике используют также др. вариац. принципы.

В задаче о движении материальной точки во внеш. поле можно интересоваться только формой траектории без детального знания временно́й зависимости $\boldsymbol{q}(t)$. В этом случае используется принцип минимизации укороченного действия, или принцип Мопертюи: при задании потенц. энергии U, полной энергии E, начальных и конечных точек траектории вся траектория определяется минимизацией функционала

$$S_0=\int_{\boldsymbol{q}_i}^{\boldsymbol{q}_f}\sqrt{2m\left(E-U(\boldsymbol{q})\right)}\,dl,$$

где dl — элемент длины траектории, а $\boldsymbol{q}_i$ и $\boldsymbol{q}_f$ — начальная и конечная её точки. Принцип Мопертюи является следствием принципа наименьшего действия и допускает обобщение на сложные механич. системы.

Аналогом принципа Мопертюи в оптике служит *Ферма принцип* наименьшего времени: в среде с переменным показателем преломления n траектория луча света такова, что интеграл $\int_{\boldsymbol{q}_i}^{\boldsymbol{q}_f} dl/n(\boldsymbol{q})$ минимален. Иначе говоря, луч света избирает себе траекторию, для прохождения к-рой требуется миним. время.

Последний пример — вариац. принцип Ритца в квантовой механике. Задачу о решении ур-ния Шрёдингера $\hat{H}\psi(q)=E\psi(q)$ можно сформулировать как задачу о минимизации функционала $J=\int \psi^*\hat{H}\psi\,dq$ при дополнит. условии $\int \psi^*\psi\,dq=1$ (здесь q — набор обобщённых координат). Принцип Ритца — незаменимое орудие расчёта сложных атомов и ядер, когда точное решение ур-ния Шрёдингера невозможно и задачу решают минимизацией функционала J на нек-ром классе пробных ф-ций.

Лит.: Курант Р., Гильберт Д., Методы математической физики, пер. с нем., т. 1, 3 изд., М.— Л., 1951; Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А., Курс вариационного исчисления, 2 изд., М.— Л., 1950; Арнольд В. И., Математические методы классической механики, 2 изд., М., 1979.

А. В. Смилга.

ВАРИАЦИО́ННЫЕ ПРИ́НЦИПЫ МЕХА́НИКИ — положения, устанавливающие свойства, к-рыми истинное, т. е. фактически происходящее под действием заданных сил, движение (или состояние равновесия) механич. системы отличается от всех её кинематически возможных движений (состояний), и позволяющие получить в качестве следствия ур-ния движения или условия равновесия этой системы. Ряд В. п. м. выражает эти свойства в виде, к-рый позволяет распространить принцип на др. области физики. Этим обусловливается важность В. п. м. для всей теоретич. физики. Практич. ценность В. п. м. заключается в том, что при применении их к решению задач механики из ур-ний движения или условий равновесия исключаются наперёд неизвестные реакции соответствующих связей.

Устанавливаемое В. п. м. свойство движения сводится во многих случаях (но не всегда) к тому, что для истинного движения системы нек-рая физ. величина, являющаяся ф-цией кинематич. и динамич. характеристик этой системы, имеет экстремум (минимум или максимум). При этом В. п. м. могут отличаться друг от друга видом той физ. величины (той ф-ции), к-рая для истинного движения является экстремальной, а также особенностями механич. систем и классами тех движений, для к-рых это экстремальное свойство имеет место. По форме В. п. м. можно разделить на дифференциальные, устанавливающие, чем истинное движение системы отличается от кинематически возможных в каждый данный момент времени, и интегральные, устанавливающие это различие для перемещений, совершаемых системой за конечный промежуток времени. В рамках механики дифференц. принципы имеют более общий характер, т. к. они приложимы к системам с любыми голономными и неголономными связями (см. *Голономная система, Неголономная система*). Интегральные принципы в их наиб. компактной форме приложимы только к голономным и даже только к консервативным системам. Однако выражение их через энергию и инвариантность по отношению к преобразованиям координат системы делает эти принципы приложимыми далеко за пределами классич. механики.

К осн. дифференц. В. п. м. относятся: 1) возможных перемещений принцип, устанавливающий общее условие равновесия механич. системы с идеальными связями, согласно к-рому положения равновесия отличаются от всех др. положений системы тем, что только для положений равновесия сумма элементарных работ всех активных сил на любом возможном перемещении системы равна нулю; 2) Д'Аламбера — Лагранжа принцип, устанавливающий общее свойство движения механич. системы с идеальными связями, согласно к-рому истинное движение системы отличается от всех кинематически возможных тем, что только для истинного движения сумма элементарных работ всех активных сил и сил инерций на любом возможном перемещении системы равна в каждый момент времени нулю. Равенство, выражающее этот принцип математически, наз. ещё общим ур-нием механики (см. *Динамика*). К др. дифференц. В. п. м. относятся *Журдена принцип*, принцип наименьшего принуждения (см. *Гаусса принцип*) и принцип наименьшей кривизны (см. *Герца принцип*).

К интегральным В. п. м. относятся т. н. принципы наименьшего, или стационарного, действия, согласно к-рым для данного класса сравниваемых друг с другом движений истинным является то, для к-рого физ. величина, наз. *действием*, имеет за время перемещения системы минимум (точнее, экстремум). Принцип наименьшего действия чаще всего применяется в форме Гамильтона — Остроградского или Мопертюи — Лагранжа. В принципе Гамильтона — Остроградского сравниваются движения, происходящие между двумя данными конфигурациями системы за один и тот же промежуток времени, а под действием в простейшем случае понимается определ. интеграл по времени от разности между кинетич. и потенциальной энергиями системы. В принципе Мопертюи — Лагранжа сравниваются движения консервативной системы между двумя данными её кон-